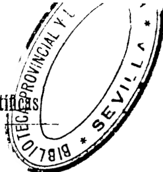




Junta para Ampliación de estudios é Investigaciones científicas

Dr. MORITZ PASCH
Profesor de la Universidad de Giessen.

LECCIONES DE GEOMETRÍA MODERNA

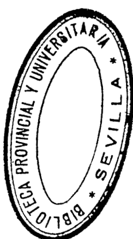
TRADUCCIÓN ANOTADA DE LA PRIMERA EDICIÓN ALEMANA, CON ADICIONES DEL AUTOR, POR

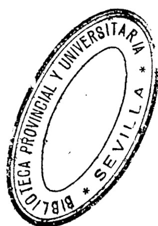
J. G. Alvarez Ude y J. Rey Pastor

MADRID
IMPRENTA DE EDUARDO ARIAS
San Lorenzo, núm. 5.

1913

ÍNDICE





Prólogo de la edición alemana

En las tentativas hechas hasta el presente para establecer los fundamentos de la Geometría de un modo que responda á las exigencias cada día más acentuadas, no se ha hecho resaltar claramente en todo su valor el origen empírico de la misma.

Si se considera la Geometría como ciencia que, nacida de la observación de la naturaleza y sin otro material que ésta, de las leyes inmediatamente observables en los fenómenos más sencillos trata de obtener, con método puramente deductivo, las leyes de otros más complicados, es indudablemente preciso prescindir de algunas ideas ya adquiridas, ó atribuirles significación distinta de la usual; pero con esto se reduce á sus verdaderos límites el material de trabajo de la Geometría, y desaparece todo motivo de controversia.

Esta concepción pretenden desarrollar con todo rigor las páginas que siguen. Ciertamente que se pueden unir á la Geometría otras especulaciones; mas, la feliz aplicación que tiene constantemente en las ciencias naturales y en la vida práctica, estriba únicamente en que los conceptos geométricos correspondían exactamente en su origen á los objetos empíricos, si bien, para facilitar el desarrollo teórico, han sido encubiertos con una red de conceptos artificiosos; por esto, limitándose desde un principio al núcleo empírico, conserva la Geometría

el carácter de ciencia natural, diferenciándose de las demás en que sólo necesita tomar inmediatamente de la experiencia un muy reducido número de conceptos y leyes.

En esencia, la obra se ocupa solamente de las propiedades proyectivas de las figuras, y no alcanza más que hasta lo estrictamente necesario para poder ofrecer algo bien terminado. Comienza con la enumeración de los conceptos fundamentales y axiomas necesarios, y termina con la introducción de las coordenadas y cálculo de las mismas para puntos y planos. Consecuencia esencial de las ideas antes expuestas es que el concepto de punto no adquiera hasta su forma final los caracteres que de ordinario se suelen atribuir, desde un principio, al llamado «punto matemático». Estudiamos también la perspectividad, la homografía y la correlación; pero los elementos imaginarios y las figuras curvas quedan excluídos.

El profesor Klein ha observado por primera vez, y discutido repetidamente, que la Geometría proyectiva es independiente de la teoría de paralelas, y se puede fundamentar sin su admisión. Sin embargo, yo no podía prescindir completamente de la noción de medida sin perjudicar el punto de vista adoptado, y necesité, por esto, introducir la teoría de la congruencia, que con tal motivo se continúa hasta exponer el sistema polar absoluto, en el cual corresponde á cada plano el punto común á sus perpendiculares.

Observaremos, para terminar, que el presente escrito procede de las lecciones universitarias profesadas por primera vez en el semestre de invierno 1873-74.

M. PASCH.

Giessen, Marzo de 1882.

Prólogo á la edición española

La Sociedad Matemática Española ha tributado á mi obra *Vorlesungen über neuere Geometrie* el honor de publicar una edición española de la misma, realizando el trabajo de traducción, de modo muy de agradecer, los Sres. Alvarez Ude y Rey Pastor.

Desde la aparición del libro ha transcurrido una treintena de años. En este tiempo han realizado los geómetras una gran labor relativa á la formulación de axiomas y definiciones, á la división de los axiomas en grupos, á la investigación de la independencia entre unos y otros conceptos y teoremas, así como respecto á la simplificación de las demostraciones. Al lector que desee conocer los progresos de estos desarrollos, y adquirir datos sobre su bibliografía, le recomendamos la notable obra del profesor Schur *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig-Berlín, 1909.

He aprovechado esta ocasión para redactar algunas adiciones á diversos puntos de las «Lecciones», sin introducir variación en el texto. La finalidad de la obra era, en primer término, organizar completamente la Geometría como exige la naturaleza de la Matemática, y al mismo tiempo hacer resaltar el origen empírico de los conceptos y nociones geo-

métricos. En realidad, en algunos trabajos no se concede á esta tendencia todo su valor, ó es relegada á segundo término.

Que la nueva edición de las «Lecciones» conquiste nuevos adeptos á las ideas en ella contenidas.

M. PASCH.

Giessen, Marzo de 1912.

Advertencia de los traductores

La gran importancia que actualmente se concede al estudio de los fundamentos de la Geometría, impulsó á la *Sociedad Matemática Española* á comenzar por una obra de este género la serie de traducciones anunciada de acuerdo con la *Junta para Ampliación de estudios*. En las clásicas *Vorlesungen über neuere Geometrie* del profesor Pasch, uno de los iniciadores de estos estudios, se presenta por primera vez un sistema completo de postulados, suficientes para exponer rigurosamente, sin recurrir de nuevo á la intuición, la Geometría proyectiva lineal. Este mérito, que no es único, las hace acreedoras á su publicación en idioma español.

En la traducción, hecha del modo más literal posible, hemos substituído, sin embargo, algunas denominaciones del autor por las usadas más comúnmente en España, indicando estas variaciones en notas al pie. Las demás notas no significan pretensión de mejorar el texto original, sino simplemente deseo de facilitar á los alumnos de nuestras Universidades la inteligencia de algunos puntos; muchos lectores podrán, por tanto, prescindir de ellas. En cambio, las importantes y numerosas adiciones que el autor ha tenido á bien escribir para nuestra edición la avaloran notablemente, y por ellas le damos las gracias más rendidas,

J. G. Alvarez Ude y J. Rey Pastor.

Introducción

La Geometría moderna es, por su formación, opuesta, más que á la Geometría de los antiguos, á la Geometría analítica. La Geometría de los antiguos, tal como fué compilada por Euclides, ha conservado en lo esencial su carácter á través de las constantes ampliaciones y frecuentes transformaciones que ha sufrido; una parte de ella da los conocimientos preliminares necesarios para el estudio de la Geometría analítica; se puede designar á esta parte con el nombre de Elementos, y á la Geometría de Euclides, en general, con el de Elemental, por la uniforme sencillez de su procedimiento. La Geometría analítica es, por el asunto, una continuación de los Elementos, pero completamente opuesta á ellos en su método. En los Elementos, la idea de número sólo interviene cuando la naturaleza del problema lo exige; en los demás casos, el medio de demostración es la construcción. La Geometría analítica, por el contrario, se sirve continuamente del Análisis, aspirando, precisamente, á reducir cada problema geométrico á una operación numérica, aunque, claro es, sin por esto excluir completamente la construcción.

El desarrollo, mayor cada día, de la Geometría pura ha demostrado que para la resolución de problemas de carácter superior, en tanto no se trate de hallar valores numéricos, no es la Geometría analítica el único método fecundo. Tomando, en parte, como base los copiosos resultados del Análisis, han

sido descubiertos nuevos puntos de vista que, en lo posible, permiten dominar sin ayuda del cálculo complicadas relaciones, de modo no menos fácil que cuando á ello se llega ó puede llegarse por otros caminos. Esta creación, que toma sus medios auxiliares directamente de la naturaleza del objeto, se ha distinguido de la Geometría elemental y de la Geometría analítica, llamándola Geometría pura, Geometría superior, Geometría sintética, Geometría sintética moderna, ó, simplemente, Geometría moderna.

La Geometría moderna se basa también en la elemental. Pero, aunque atendido su común procedimiento, puede decirse que ambas forman la Geometría pura, sorprende, no obstante, la diversidad de su carácter, que, una vez pasados los Elementos, se hace sensible.

Cualidades características de una y otra son las dos siguientes: En la Geometría elemental, los conceptos son muy restringidos; en la moderna, son amplios y generales. En aquélla, los diversos casos que en las figuras relativas á un teorema pueden presentarse, exigen otras tantas distinciones en la demostración; en ésta, todos quedan comprendidos en una demostración única.

La Geometría analítica ha tomado algo de la sintética; se ha apropiado sus puntos de vista y obtenido excelentes resultados con su uso, y es de esperar que se llegará, mediante una más íntima fusión de ambas, á crear una Geometría superior con carácter armónico. La Geometría elemental, por el contrario, suele limitarse á lo tradicional, por lo que aún está poco influída por la moderna.

Acaso deberíamos examinar ahora el hecho de que las cuestiones elementales de Geometría aparezcan tratadas por caminos pesados, en tanto que las superiores lo son de modo más claro y sencillo. Pero la experiencia ha decidido ya sobre esto en favor de la Geometría moderna. Los conceptos generales que en ella intervienen son también aplicables en la Geometría elemental, y si se los introduce oportunamente, esto es, en cuanto su comprensión sea posible, se reconoce en seguida su utilidad.

La cuestión con esto planteada no es nueva; pero su acertada solución está íntimamente ligada con la de otra, más antigua aún. No solamente se reprocha á la Geometría elemen-

tal la pesadez, sino también la imperfección ú obscuridad que en alto grado comunica á los conceptos y demostraciones. El hacer desaparecer estos defectos ha sido una constante aspiración, para cuyo logro se han realizado los mayores esfuerzos y utilizado los medios más variados; pero el examen de los resultados obtenidos da lugar á pensar, acaso, que la total desaparición de tales defectos es un imposible. Sin embargo, no es así; bien y en toda su extensión mirada, la cuestión no aparece como irresoluble; está, simplemente, dificultada por circunstancias de que más tarde hablaremos (*). Precisamente en este respecto, la reiterada aplicación de los modernos modos de ver muestra, bien á las claras, su alcance. Los esfuerzos que se hacen para emprender una seria transformación dirigida hacia modelos bien acabados y que dé al desarrollo un carácter de absoluta pureza, ponen de manifiesto los obstáculos que á ello se oponen y suscitan en el espíritu la energía necesaria para vencerlos. Como uno de tales modelos puede calificarse la Geometría moderna; ella nos encamina á un nuevo estudio de los rudimentos de la Geometría, y poniendo gran cuidado en no interrumpir la pureza del desarrollo, nos muestra el modo de alejar las ideas origen de la reprochada falta de claridad.

Una exposición de la Geometría con este carácter, no permite, naturalmente, suponer en el lector ninguno de los conocimientos que se acostumbra adquirir por primera vez en Geometría, sino solamente los que, al comenzar el estudio de ésta, debe tener todo el mundo. Se exige, para seguirla, algún trabajo y cuidado, apartar de la imaginación cosas que nos son familiares y volver á colocarse en un punto de vista del que nos hemos alejado en demasía; pero todo ello es indispensable, si ha de conseguirse el fin que con esta exposición nos hemos propuesto.

Los conceptos geométricos forman un grupo especial dentro de los que, en general, sirven para la descripción del

(*) En los artículos 6 y 12.

mundo externo. Cuando designamos el color de un objeto, hablamos de una propiedad física; si decimos que dicho objeto es cúbico, hacemos aplicación de un concepto geométrico. Estos conceptos pueden enlazarse entre sí, una vez admitida la idea de número, por medio de una serie de relaciones en las que no intervenga ningún otro concepto.

No es esta la ocasión de hacer la delimitación de los conceptos geométricos respecto de los demás, sino, más bien, de indicar simplemente el modo de ver, al que con todo rigor procuraremos atenernos en lo sucesivo, según el cual no veremos en la Geometría más que una parte de las Ciencias naturales.

En un cuerpo, del cual decimos que es «cúbico», se distinguen caras, aristas, vértices, etc., y pueden establecerse relaciones mutuas entre estos elementos. En cambio, la distancia entre dos cuerpos queda insuficientemente determinada cuando, sin salirse de los límites impuestos por los medios ó el fin de la observación, pueden apreciarse en uno de ellos partes. Tales límites son variables para cada caso; el mismo cuerpo que en una ocasión debe ser considerado como un todo, aparece en otras de modo contrario; se presentan entonces sus partes como miembros de un todo que se analiza en su aspecto geométrico. Los cuerpos en los que, dentro de los límites de observación, no puedan apreciarse partes, se llaman siempre *puntos*, reservándose en Geometría la palabra «cuerpo» para otro uso.

Cosa análoga ocurre en las *líneas* (simples) limitadas, sobre las cuales es imposible recorrer caminos distintos entre dos de sus puntos, sin salirse de los límites impuestos por la observación; cada dos partes se tocan ó unen entre sí en un punto á lo más. Las líneas (simples) cerradas se componen de dos líneas limitadas. Dos partes de una superficie pueden tocarse en puntos ó líneas. La aplicación de este concepto queda así unida á una cierta inseguridad, como ocurre con casi todas las ideas que se derivan directamente de la interpretación de los fenómenos.

Adición á la Introducción.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1887, tomo XXX, pág. 130; 1892, tomo XL, pág 149.)

La concepción empírica de la Matemática y el deseo de llegar á demostraciones perfectas, dan la norma seguida en la siguiente exposición de la Geometría. Esta exposición llega hasta la introducción de la serie continua de números en Geometría proyectiva, sin descender, naturalmente, al estudio de cuantos casos particulares pueden presentarse, y en ella pretendemos hacer ver la posibilidad de restringir los conceptos que sirven de fundamento para la aplicación á los objetos de la vida real, sin que tales restricciones nos impidan establecer, de otra manera, los conceptos de ordinario reconocidos como fecundos y de utilidad práctica, si bien con una significación distinta de la usual.

En esta última clase de conceptos figura, en primer término, el que se acostumbra tener del *punto*. No llegamos nosotros á la idea que, desde un principio, va enlazada á la palabra «punto», hasta el final de esta obra (§ **23**); allí se distingue el *punto matemático* frente al *punto físico*. Tal distinción se realiza mediante un axioma (§ **23**, Ax. I), que nos da el medio de pasar del punto físico al número, con la exactitud correspondiente á cada caso particular. El paso inverso, del punto matemático, es decir, de las coordenadas, al punto físico, exige establecer (§ **23**), que á cada punto físico corresponde una variedad continua de puntos matemáticos.

(Véase también mi *Einleitung in die Differential-und Integralrechnung,* 1882, pág. 12 á 14 y 188.)

Klein ha sido el primero en hacer notar la falta de precisión de que adolecen los conceptos geométricos, en la Memoria

« Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve», publicada en *Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen,* 8 de Diciembre de 1873, reimpresa en *Mathematische Annalen,* 1883, tomo XXII, pág. 249. (Véase también *Mathem. Ann.,* 1890, tomo XXXVII, pág. 571.) Señaladamente, ha dado una expresión analítica de la inexactitud propia de la *línea física.*

Aunque en la moderna Literatura matemática se parte de representaciones del punto, de la recta y de la superficie, á las que no se puede tachar de inexactas, hay que decir, en cambio, que no se hacen resaltar los conceptos fundamentales y axiomas (§ **1**), sino que se hace uso de ideas y proposiciones que necesitan ser referidas á otras. Los conceptos y los principios que sirven de base para tales representaciones, son *conceptos primitivos* y *principios fundamentales* (*) en el sentido que en los §§ **10** y **12** se explicará, siendo de la mayor importancia reunir los que se refieren á cada grupo de conocimientos matemáticos, como, por razón de su cometido, hace la *Axiomática.* Hecho así, aún queda la cuestión de referir tales conceptos y principios á los conceptos fundamentales y axiomas, cosa que puede aplicarse, no sólo á la Geometría, sino también al Análisis.

Suele pretenderse que la introducción de cada concepto en la Matemática debe estar de acuerdo con sus aplicaciones fuera de la misma; pero, desde el punto de vista puramente matemático, puede prescindirse de ello y aceptar como buenas las definiciones de un concepto que no tienen relación alguna con sus aplicaciones, y aun preferirlas á las demás. Sin embargo, cuando se trate de aplicar fuera de la Matemática un concepto ideado para utilizarlo únicamente dentro de ella, no debe eludirse el examen de la licitud de tal aplicación; es, pues, necesario un estudio especial, una revisión de los conceptos que puedan constituir fundamento suficiente para todas las ulteriores aplicaciones.

(*) No hallamos traducción más apropiada á las palabras *Stammbegriffe* y *Stammsätze,* que emplea el autor para nombrar aquellas ideas y proposiciones de las que proceden, ó á las cuales pueden referirse todas las demás.—*(N. T.)*

§ 1.—De la línea recta

1. Comenzaremos por el estudio de la línea recta. Se suele decir: por dos puntos se puede trazar una línea recta. Mas ésta puede limitarse de muy distintos modos, y esta indeterminación ha conducido á que se diga de la línea recta que es ilimitada, ó que debe considerarse como indefinidamente extensa. Este concepto no corresponde á ningún objeto del mundo real; la observación nos sugiere más bien la idea de línea recta limitada, ó camino recto entre dos puntos; del segmento rectilíneo, en una palabra. Concretándonos, pues, á esta última expresión, hablaremos:

1) De segmento rectilíneo trazado entre dos puntos.

2) De puntos situados en el interior de un segmento rectilíneo.

Todas las locuciones usadas en el presente artículo pueden ser referidas á estas dos. Por abreviar, diremos càsi siempre «segmento» en lugar de «segmento rectilíneo». De un segmento trazado entre los puntos A y B (ó B y A) se dice también que une A con B, que va de A á B, que tiene los extremos A y B, que está limitado por los puntos A y B. Al decir que un punto C pertenece á un segmento, que es punto del segmento, ó que el segmento pasa por él, se entiende que C está situado en el interior del segmento, ó es uno de sus extremos. Todo punto para el cual no sucede esto, está situado *fuera del segmento.*

La observación nos da á conocer las propiedades relativas á los segmentos rectilíneos y á sus puntos. Las enunciaremos en forma de proposiciones aisladas, pero distinguiendo en ellas dos clases. Algunas serán demostradas, es decir, se hará ver cómo su contenido es consecuencia de otras proposiciones, las cuales deben siempre precederlas. Las proposicio nes que se demuestran, las designamos como teoremas frente á las otras que consideramos como axiomas. Los teoremas son deducidos de los axiomas, de tal modo, que todo lo relativo á los fundamentos de los teoremas esté, sin excepción, contenido en los axiomas.

2. Las primeras observaciones sobre los segmentos rectilíneos y sus puntos suministran una serie de relaciones de las cuales una parte es el contenido de los axiomas que en este artículo se exponen.

Como los puntos A y B pueden ser tomados arbitrariamente (con las limitaciones señaladas al final de este artículo), se puede unir A con B por medio de un segmento rectilíneo, pero esto es posible de un solo modo. Se puede tomar un punto C interior al segmento. Se puede trazar un segmento rectilíneo que una A con C; este segmento no pasa por B, pero todos sus puntos están en el segmento anterior. Si, pues, se unen A con C y C con B, no se obtiene ningún punto que no pertenezca al primer segmento, pero éste, á su vez, no contiene ningún punto que no esté en uno ú otro de aquellos dos. Enunciación de estas observaciones son los cinco axiomas siguientes:

A C B

I. *Entre dos puntos se puede trazar siempre un segmento, y solo uno.*

Según esto, para designar un segmento, basta nombrar sus extremos. El que tiene los A y B se designa por AB ó BA.

II. *Dado un segmento, se puede siempre hallar un punto que esté en su interior.*

III. *Si el punto* C *está dentro del segmento* AB, *el punto* A *está fuera del segmento* BC.

Asimismo, el punto B está fuera del segmento AC.

IV. *Si el punto* C *está dentro del segmento* AB, *todos los puntos del segmento* AC *son, al mismo tiempo, puntos del segmento* AB.

De otro modo: *Si el punto* C *está dentro del segmento* AB *y el punto* D *es interior al segmento* AC *ó al* BC, *el punto* D *es también interior al segmento* AB.

V. *Si el punto* C *es interior al segmento* AB, *todo punto que no pertenezca al segmento* AC, *ni al* BC, *no puede, tampoco, pertenecer al* AB.

De otro modo: *Si* C *y* D *son puntos del segmento* AB *y* D *es exterior á* AC, *será interior á* BC.

3. Tomemos ahora el punto *C* en el segmento *AB*, y el punto *D* en el segmento *BC*; en tal hipótesis, se ve que el punto *C* pertenece al segmento *AD*. Esta propiedad, al igual que las anteriores, aparece como inmediata, pero se puede relacionar con ellas, circunstancia ésta que no debemos desaprovechar. Se presenta, pues, la nueva relación en forma de teorema, no de axioma.

Teorema 1.º—*Si el punto* C *está en el interior del segmento* AB *y el punto* D *en el interior del segmento* BC, *el punto* C *está en el interior del segmento* AD.

A C D B

En efecto; por estar el punto *D* dentro del segmento *BC*, el punto *C* está fuera del segmento *BD* (Ax. III); por estar el punto *C* dentro del segmento *AB* y el punto *D* dentro del segmento *BC*, el punto *D* está, también, dentro del segmento *AB* (Ax. IV); finalmente, por estar, según esto, los puntos *C* y *D* dentro del segmento *AB* y el punto *C* fuera del segmento *BD*, estará dentro del segmento *AD* (Ax. V).

Definición 1.ª Diremos que el segmento *CD* es una parte del *AB*, si éste contiene todos los puntos de aquél, pero no solamente éstos.

Teorema 2.º—*Si* C *y* D *son puntos del segmento* AB *y uno de ellos, por lo menos, es interior al mismo, el segmento* CD *es una parte del* AB.

Supongamos que es *C* el punto interior al segmento *AB*. En tal caso, *D* pertenece á uno de los dos segmentos *AC* ó *BC* (Ax. V), por ejemplo, al *BC*; por consiguiente, en virtud del teorema anterior, *C* está en el interior del segmento *AD*. Según esto, *A* está fuera del segmento *CD* (Ax. III). Como por otra parte, todos los puntos de *CD* pertenecen al segmento *AD* (Ax. IV) y, por tanto, al *AB* (Ax. IV), resulta que éste contiene todos los puntos del *CD*, y además el *A*, que no lo es de

dicho segmento; luego según la definición dada, el segmento *CD* es una parte del *AB*.

El primer axioma ha sido ya utilizado al enunciar los restantes; puesto que sin él no podríamos lógicamente hablar del segmento *AB*, el segmento *BC*, etc. Una afirmación tan trivial como la contenida en el axioma III, antes de encontrar aplicación, pudiera ser tenida por frívola ó sin objeto. Sin embargo, véase cómo ha jugado importante papel en las precedentes demostraciones. Por esto, nos proponemos no omitir en nuestros razonamientos ni aun los argumentos más insignificantes.

4. Si se toma un punto *B* interior al segmento *AC*, resulta de lo expuesto que los segmentos *AB* y *BC* componen el segmento total *AC* (*). En tal caso, diremos que el segmento *BC* es una prolongación del *AB* por el extremo *B*, ó que el segmento *AB* se ha prolongado desde *B* hasta *C*. Sentado esto, la observación nos suministra algunas nuevas propiedades de los segmentos, que no necesitan ser demostradas. En primer lugar, dados los puntos arbitrarios *A* y *B* (con las limitaciones que se indicarán al final de este artículo), el segmento *AB* se puede prolongar por el lado de *A* ó el de *B*. Si se efectúa esta prolongación primero por el extremo *B* hasta el punto *C*, y después, nuevamente, desde *B* hasta otro punto *D*, de los dos segmentos obtenidos *BC* y *BD*, uno de ellos tiene todos sus puntos sobre el otro. Si se prolonga el segmento *AB* por el extremo *B* hasta *C* y por el *A* hasta otro punto *E*, dicho segmento *AB* tiene todos sus puntos en el nuevo segmento que determinan los puntos *C* y *E*. De este modo obtenemos tres nuevos axiomas, últimos de este artículo, que pueden enunciarse como sigue:

VI. *Si* A *y* B *son puntos arbitrarios, se puede elegir el punto* C *de tal modo, que* B *quede en el interior del segmento* AC (**).

VII. *Si el punto* B *es interior á los dos segmentos* AC *y* AD, *ó el punto* C *pertenece al segmento* AD, *ó el punto* D *pertenece al segmento* AC (***).

A *B* *C* *D*

VIII. *Si el punto* B *está en el interior del segmento* AC *y el*

(*) Véase el final del § **12**.

(**) Es decir; el segmento *AB* se puede prolongar por el extremo *B*.—*(N. T.)*

(***) Propiedad equivalente á la antes enunciada en segundo lugar, relativa á las dos prolongaciones por un mismo extremo.—*(N. T.)*

punto A *está en el interior de* BD, *y se unen los puntos* C *y* D *por un segmento rectilíneo, el punto* A *está en este segmento, y lo mismo ocurre al* B (*).

D A B C

5. Definición 2.ª Diremos que tres puntos forman una serie rectilínea, si uno de ellos está en el interior del segmento rectilíneo limitado por los otros dos.

Teorema 3.°—*Si tanto los puntos* A, B *y* C, *como los* A, B *y* D, *forman series rectilíneas, igual sucederá con los puntos* A, C y D *y con los* B, C *y* D.

En efecto; en virtud de la hipótesis (Def. 2.ª), están: ó *A* en el interior de *BC*, ó *B* en el interior de *AC*, ó *C* en el de *AB*. Por idéntico motivo, ó está *A* en *BD*, ó *B* en *AD*, ó *D* en *AB*.

Supongamos, primero, que *C* y *D* estén en el segmento *AB*. En tal caso, ó está *D* en *BC* (Ax. V) y, por consiguiente, *C* en *AD* (T. 1.°), con lo cual la proposición está demostrada, ó bien está *D* en *AC*, y en virtud del mismo teorema 1.°, *C* pertenece al segmento *BD*, es decir, también se verifica el enunciado.

A C D B

Si *C* es interior y *D* exterior al segmento *AB*, podemos admitir (permutando los nombres de estos puntos, si es preciso), que el segmento *AD* pase por *B* (**); pero entonces (Ax. IV) también está *C* en *AD*, y además (T. 1.°) *B* en *CD*, luego también en este caso aparece la existencia de las series *ACD* y *BCD*.

A C B D

Si *C* está fuera del segmento *AB*, podemos suponer (permutando, si es preciso, las letras *A* y *B*) que *B* está en *AC*. En tal supuesto, por formar *ABD* serie rectilínea, puede ocurrir: 1.° Que *A* esté dentro de *BD*, en cuyo caso aparecen *AD* y *BC* como prolongaciones del segmento *AB*, y por el axioma VIII los dos puntos *A* y *B*

D A B C

(*) Este enunciado es equivalente al antes dado en tercer lugar, relativo á la prolongación de *AB* por ambos extremos, si se tiene en cuenta el teorema 2.°—*(N. T.)*

(**) En efecto; por formar *ABD* una serie rectilínea, de las tres disposiciones posibles (*A* en *BD*, *B* en *AD*, *D* en *AB*), excluída la tercera por hipótesis, de no verificarse la segunda, sólo cabe que esté *A* en *BD*, y, cambiando la notación de *A* y *B*, estará *B* en *AD*.

Nótese que este cambio no influye en la validez de la demostración, ya que así quedará probado que *BCD* y *ACD* (en vez de *ACD* y *BCD*) son series rectilíneas, lo cual es lo mismo.—*(N. T.)*

pertenecen al segmento CD, con lo cual está demostrada la cuestión. 2.° Que B esté dentro de AD, y, entonces, por ser BC y BD prolongaciones hacia el mismo extremo B, se puede aplicar el axioma VII, el cual nos dice que C está en AD (y, por tanto, en BD (T. 1.°)), ó D está en AC (y, por igual razón que antes, en BC), y en ambos casos resulta que ACD y BCD son series rectilíneas. 3.° Que D esté dentro de AB y, por consiguiente, en AC (Ax. IV) y, entonces, el teorema 1.° demuestra que B está dentro de CD y también en este caso es cierta la propiedad.

A B C D

A B D C

A D B C

6. En la hipótesis hecha respecto de los puntos A, B y C, el segmento rectilíneo ó camino recto que determinan los puntos A y B, convenientemente prolongado si es preciso, contendrá al punto C. Por esto diremos que el punto C está en la línea recta de los puntos A y B ó, más brevemente, en la línea recta AB, ó en la recta AB (Def. 3.ª). El mismo significado tienen las expresiones siguientes: la recta AB pasa por C, C es un punto de la recta AB, C está en AB, etc. Igualmente diremos que A está en la recta BC, B en la AC y C en la AB.

Teorema 4.°—*Por dos puntos arbitrarios,* C *y* D, *se puede trazar siempre una línea recta.*

Estos dos puntos C y D, determinan un segmento (Ax. I) y en él se puede tomar un punto A (Ax. II). Análogamente, en el segmento determinado por A y C (Ax. I), se puede tomar el punto B (Ax. II). Tenemos así dos series rectilíneas (Def. 2.ª); una, la ABC, por construcción, y la otra, la ABD, en virtud del teorema 1.°. Luego, según la definición últimamente dada, la recta AB pasa por C y D.

C B A D

La demostración es completamente análoga si se toma A de modo que C esté en el interior de AD (Ax. VI) y B se elige de manera que D esté en el segmento AB; pues, entonces, la serie rectilínea ABD está construída y la ABC resulta de la aplicación del axioma IV.

A C D B

Teorema 5.°—*Toda recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos.* Es decir, *todas las rectas que tienen dos puntos comunes, coinciden.*

Sea A' un punto de la recta AB (por consiguiente, A un punto de la $A'B$). Si C es también un punto de AB, puede suceder que sea distinto de A' ó no. En el primer caso, por definición, son series rectilíneas ABC y ABA', y, en virtud del teorema 3.°, también lo es BCA'; luego, según la definición de línea recta, C está en la recta $A'B$. Si convenimos en llamar también á A y B puntos de la recta AB y, por consiguiente, á A' punto de la recta $A'B$, resulta que, también en el segundo caso (que C coincida con A'), es C punto de la recta $A'B$. (Aun pudiera suceder, dentro del primer caso, que C coincidiera con A ó B; aunque esto en nada altera la conclusión, lo supondremos, no obstante, distinto de A y B.) Resulta, pues, que todos los puntos de la recta AB pertenecen á la $A'B$ y, de igual modo, todos los de ésta son de aquélla. Siendo, por consiguiente, idénticas las expresiones «C está en AB» y «C está en $A'B$», podemos decir que las dos rectas AB y $A'B$ coinciden. Sentado esto, si se toman los dos puntos A' y B' arbitrarios en la recta AB, también coinciden las dos rectas AB y $A'B'$ (*). Finalmente, también coinciden las dos rectas AB y CD si ambas pasan por los puntos A' y B' (**).

Frecuentemente, se emplea una sola letra para designar la recta, en vez de nombrar dos de sus puntos. Si A y B son puntos de la recta r, diremos que la recta r ó AB (T. 5.°) une los puntos A y B. Todos los puntos del segmento AB pertenecen á la recta r (Def. 3.ª), por cuya razón se dice que este segmento es un segmento de la recta r. Gráficamente, se representa cada recta por uno de sus segmentos.

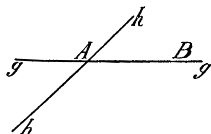


Fig. 1.ª

Si dos rectas g y h tienen un punto común A, no pueden tener ningún otro además (T. 5.°), y, en tal caso, se dice que las dos rectas se cortan ó se encuentran en el punto A; éste se llama punto de intersección de ambas, y se le suele designar por gh *(fig. 1.ª)*.

(*) Pues según lo demostrado, todo punto de AB pertenece á $A'B$, y todo punto de ésta, por igual razón, pertenece á $A'B'$.—*(N. T.)*

(**) Pues la recta $A'B'$, en virtud de la anterior, coincide con las AB y CD.—*(N. T.)*

7. Consideremos ahora una sola recta r, y sean A, B y C puntos de la misma, con lo cual, en virtud del teorema 5.°, el punto C está en la recta AB. Estos puntos forman, pues, una serie rectilínea (Def. 2.ª), es decir, A está dentro del segmento BC, ó B está dentro del AC, ó C está dentro del AB. Si sucede, por ejemplo, esto último, se dice que C está en la recta r, entre A y B ó, también, que A y C están al mismo lado de B; que B y C están al mismo lado de A, y que A y B están á distintos lados de C. Mas, en tal caso, no está A entre B y C, ni B entre A y C.

r A C B r

Resultan, pues, los siguientes teoremas:

TEOREMA 6.°—*Si tres puntos están en línea recta, uno de ellos está entre los otros dos.*

TEOREMA 7.°—*Si* A, B *y* C *son puntos de una recta y* C *está entre* A *y* B, A *no está entre* B *y* C, *ni* B *está entre* A *y* C.

8. Si en lugar de los conceptos primeramente introducidos, relativos á segmentos, ponemos estos otros: 1) punto de una recta; 2) punto de una recta, situado entre dos de la misma, podemos enunciar en otra forma todas las proposiciones anteriores.

Comenzando por los axiomas I á VI, su contenido viene expresado, salvo lo expuesto ya en los teoremas 4.° á 7.°, por los cuatro siguientes teoremas:

TEOREMA 8.°—*Dados en una recta dos puntos* A *y* B, *se puede siempre elegir en ella un punto* C *situado entre aquéllos.*

TEOREMA 9.°—*Dados en una recta los puntos* A *y* B, *se puede hallar otro punto* C *de la misma, tal que* A *esté entre* B *y* C.

TEOREMA 10.°—*Si* A, B, C *y* D *son puntos de una recta, el* C *está entre los* A *y* B *y el* D *está entre los* A *y* C, *el* D *está también entre los* A *y* B.

TEOREMA 11.°—*Si* A, B, C *y* D *son puntos de una recta y los* C *y* D *están entre los* A *y* B, *sin que el* D *esté entre los* A *y* C, *el* D *estará entre los* B *y* C.

A C D B

Estos dos últimos teoremas se pueden substituir por uno solo, que se deduce de los 6.°, 10.° y 11.° En efecto, sean A, B, C y D puntos en línea recta, de los cuales D está entre A y B; en virtud del teorema 6.°, ó C está entre A y B, en cuyo caso tiene aplicación el teorema 11.°, ó A está entre B y C y, por consiguiente, D entre B y C (T. 10.°) ó, por último, B está entre A y C y, por lo tanto, D entre A y C (T. 10.°).

Resulta, pues, el siguiente

TEOREMA 12.°—*Si los puntos* A, B, C *y* D *están situados en una recta y el* D *está entre los* A *y* B, *también estará entre los* A *y* C *ó entre los* B *y* C.

Hemos dicho que este teorema puede substituir á los dos anteriores. En efecto, el teorema 11.° está evidentemente incluído en él; en cuanto al 10.°, se deduce fácilmente del 12.° junto con el 7.° del siguiente modo: sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro puntos de una recta que cumplen las condiciones supuestas en el teorema 10.° Por estar *C* entre *A* y *B*, ó está *C* situado entre *A* y *D* ó entre *B* y *D* (T. 12.°). Por estar *D*, según la hipótesis, entre *A* y *C*, en virtud de dicho teorema 12.°, *D* está entre *A* y *B* ó entre *B* y *C*. Ahora bien; del primer dilema no puede verificarse la primera conclusión, según el teorema 7.°, por estar *D* entre *A* y *C*, posición incompatible con la de *C* entre *A* y *D*; luego se verifica la segunda, esto es, *C* está entre *B* y *D*. Esto indica que *D* no puede estar entre *B* y *C* (por el mismo teorema 7.°), luego sólo es válida la segunda posición asignada por el dilema segundo, esto es, *D* está situado entre *A* y *B*.

De los teoremas 7.°, 10.° y 11.° ó de sus equivalentes 7.° y 12.°, se deduce el siguiente, que corresponde al 1.° en el orden de ideas establecido por los nuevos conceptos de recta, punto situado entre otros dos, etc., introducidos en substitución de los primeramente establecidos de segmento, serie rectilínea, etcétera.

TEOREMA 13.°—*Si los puntos* A, B, C *y* D *pertenecen á una recta y están* C *entre* A *y* B, *y* D *entre* B *y* C, *el punto* C *está situado entre* A *y* D (*).

Al séptimo axioma corresponde el siguiente

TEOREMA 14.°—*Si* A, B, C *y* D *son puntos de una recta y el* B *está al mismo tiempo entre los* A *y* C *y entre los* A *y* D, *el* A *no está entre los* C *y* D.

Este se deduce fácilmente de los teoremas 7.° y 12.°, si se utiliza el últimamente enunciado. En efecto; si estuviese *A* en-

(*) He aquí cómo puede deducirse fácilmente: por estar *C* entre *A* y *B*, ó está situado entre *A* y *D*, ó entre *B* y *D* (T. 12.°, en el que se permutan las letras *C* y *D*); pero, lo segundo no puede verificarse por estar *D* entre *B* y *C* (T. 7.°), luego *C* está entre *A* y *D*.—*(N. T.)*

tre *C* y *D*, como, además, está *B* entre *A* y *C*, por el teorema 13.° (*) debería estar situado *A* entre *B* y *D*, resultado contradictorio (T. 7.°) con la hipótesis hecha de estar *B* entre *A* y *D*.

Dentro del mismo supuesto del teorema anterior, ó está *C* entre *A* y *D* (T. 6.°) y, por consiguiente, entre *B* y *D* (T. 13.°), ó está *D* entre *A* y *C* y, por tanto, entre *B* y *C* (T. 13.°). Es decir, en ningún caso entre *C* y *D* (T. 7.°).

Resulta, pues, el siguiente

TEOREMA 15.°—*Si de los puntos* A, B, C *y* D *situados en línea recta, el* B *está entre los* A *y* C *y, al mismo tiempo, entre los* A *y* D, *no puede estar entre los* C *y* D.

Si en este enunciado se permutan las letras *B* y *D*, resulta un complemento del teorema 12.°, según el cual las dos posiciones posibles del punto *D* (estar entre *A* y *C*, ó entre *B* y *C*) se excluyen mutuamente. Y obsérvese, que este complemento se ha deducido apoyándose únicamente en los teoremas 6.°, 7.° y 12.°

Finalmente, al axioma VIII, último de los relativos á la recta, corresponde el siguiente

TEOREMA 16.°—*Si* A, B, C *y* D *son puntos de una recta, el* A *está entre los* B *y* C *y el* B *entre los* A *y* D, *el* A *estará entre los* C *y* D.

Esto se deduce de los teoremas 6.°, 7.° y 12.° Pues, de no estar *A* entre *C* y *D*, en virtud del teorema 6.° podría ocurrir: 1.° Que *C* estuviera entre *A* y *D*, por consiguiente, entre *B* y *D* (teoremas 7.° y 11.°) y, por tanto, *B* entre *A* y *C* (T. 13.°). 2.° Que *D* estuviera entre *A* y *C* y, como consecuencia, *B* entre los mismos *A* y *C* (T. 10.°). Ambas conclusiones son incompatibles con la hipótesis de estar *A* entre *B* y *C* (T. 7.°).

9. Mientras que para la determinación de un segmento son necesarios sus dos extremos, para la de la recta se pueden tomar dos cualesquiera de sus puntos. Debido á esta circunstancia, al axioma I substituyen los teoremas 4.°, 5.° y 6.°; en cambio, los IV, V, VII y VIII tienen por correspondiente sólo el teorema 12.°, y los II, III y VI los teoremas 8.°, 7.° y 9.°, respectivamente. De la serie de teoremas 4.° á 9.° y 12.°

(*) Para aplicarlo á este caso, deben substituirse las letras *A*, *B*, *C* y *D* por las *D*, *C*, *A* y *B*, respectivamente.—*(N. T.)*

ó sus equivalentes 4.° á 11.°, que han substituído á la serie de axiomas primeros, se pueden deducir las mismas consecuencias que de éstos. Demostraremos en este lugar únicamente dos que ofrecen especial interés.

TEOREMA 17.°—*Si se tiene en una recta un conjunto de cualquier número (finito) de puntos, se pueden elegir dos de ellos, entre los cuales estén todos los demás.*

En efecto, tomados los puntos A y B arbitrariamente entre los dados, en general habrá algunos de éstos que estén comprendidos entre los A y B y otros que no. Si C es uno de los últimos, podemos admitir que B está entre A y C (T. 6.°) (*). Todos los puntos situados entre A y B lo están también entre A y C (T. 10.°) y, además, el mismo B, y aun pueden estarlo otros de los dados. Si todavía queda una parte de éstos no comprendida entre A y C, se substituye A ó C por uno de ellos, y así sucesivamente.

TEOREMA 18.°—*Si se tiene en una recta un conjunto de cualquier número de puntos, se pueden tomar en ella dos puntos, entre los cuales estén todos los dados.*

En efecto, se pueden tomar dos de los puntos dados entre los cuales estén todos los demás (T. 17.°); sean, por ejemplo, E y F. Elijamos ahora en la recta dada el punto M, tal que E esté entre F y M (T. 9.°), y después el punto N de modo que F esté entre M y N (T. 9.°). Según el teorema 10.°, todos los puntos situados entre L y F se encuentran también entre M y F y, por consiguiente, también entre M y N (T. 10.°). Esto mismo sucede con los puntos E (T. 10.°) y F; luego todos los puntos dados están entre M y N.

10. Los teoremas 4.° y 5.° caracterizan la línea recta. Por el contrario, los teoremas 6.° á 11.° se verifican para toda línea limitada (que no corte ni sea tangente á la misma). Si se toman tres puntos A, B y C en una línea de esta naturaleza, uno de ellos estará entre los otros dos; si está C entre A y B, no está A entre B y C, etc. También se verifican, por consiguiente, todas las proposiciones fundadas exclusivamente en dichos teoremas 6.° á 11.°

Si, por el contrario, se eligen tres puntos A, B y C sobre una

(*) Pues de estar A entre B y C, bastaría permutar los nombres de A y B.—(*N. T.*)

línea cerrada (que no se corte ni sea tangente á sí misma), carece de sentido decir, por ejemplo, que C está entre A y B; porque desde A hasta B hay sobre aquella línea dos caminos, de los cuales uno pasa por C y el otro no. Sin embargo, se puede establecer un concepto análogo. Tomemos en la línea dada un punto arbitrario E, y convengamos en considerar únicamente los caminos excluídos por él. Entonces hay sólo un camino desde A hasta B; si éste pasa por C, C estará entre A y B, dentro del convenio establecido, y diremos que C está entre A y B (ó B y A) por exclusión de E. Llamaremos al punto E punto límite.

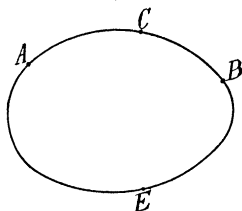


Fig. 2.ª

Con el nuevo concepto podemos operar como con el relativo á la línea limitada, y los teoremas 6.° á 11.° son nuevamente aplicables si en ellos se introduce la consideración del punto E y se agrega siempre «por exclusión de E», ó bien, «respecto del punto límite E».

El nuevo concepto se refiere á cuatro puntos A, B, C y E de una línea cerrada, y se aplica cuando de los caminos que van de A á B, uno pasa por C y no por E; pero, entonces, el otro camino pasa por E y no por C, es decir, que, respecto del punto límite C, está E entre A y B. Resulta, pues, que el mismo papel desempeña el punto E respecto del C, que éste respecto de aquél; y como no se puede ir de A á B sin encontrar á uno de ellos, diremos que A y B están separados por C y E (ó E y C).

Refiriendo ahora los teoremas 6.° á 11.° á la línea cerrada, obtendremos las siguientes proposiciones designadas por las letras b á f, á las cuales hacemos preceder otra, válida para la línea cerrada, exclusivamente.

a) *Si* C *está entre* A *y* B, *por exclusión de* E, E *estará entre* A *y* B, *por exclusión de* C.

En ésta, como en las siguientes proposiciones, nos referimos solamente á puntos de una línea cerrada única y á sus posiciones sobre la misma.

b) *Respecto del punto límite* E, *ó* A *está entre* B *y* C, *ó* B *está entre* A *y* C, *ó* C *está entre* A *y* B, *y cada una de estas posiciones excluye á las otras dos.*

c) *Si, respecto del punto límite* E, *el punto* C *está entre* A *y* B *y el punto* D *está entre* A *y* C, *el* D *está también entre* A *y* B, *con relación al mismo punto límite* E.

d) *Si, respecto del punto límite* E, *los puntos* C *y* D *están entre* A *y* B, *el punto* D *estará entre* A *y* C, *ó entre* B *y* C, *con relación al mismo punto límite* E.

e) *Dados tres puntos* A, B *y* E, *se puede elegir el* C *de modo que esté entre* A *y* B, *respecto del punto límite* E.

f) *Dados tres puntos* A, B *y* E, *se puede elegir el* D *de modo que* B *esté entre* A *y* D, *respecto del punto límite* E.

Esta última proposición aparece ahora como dependiente de las anteriores, pudiendo deducirse de las *a), b)* y *e)*. Para ello se deduce primero de las *a)* y *b)* la siguiente consecuencia:

g) *Si* A *y* B *están separados por* C *y* E, *también* C *y* E *lo están por* A *y* B.

En efecto; según la hipótesis, *C* está entre *A* y *B*, respecto del punto límite *E*, y, por tanto, *a)*, *E* está entre *A* y *B*, con relación al punto límite *C*. Según *b)*, no están, pues, *B* y *C* separados por *A* y *E*, ni tampoco *B* y *E* por *A* y *C*. Por consiguiente, según *a)*, no está *E* entre *B* y *C*, ni *C* entre *B* y *E*, respecto del punto límite *A*. Queda, pues, como único caso posible *b)*, que *B* esté entre *C* y *E*, respecto de dicho punto límite *E*, es decir, que *C* y *E* estén separados por *B* y *A* (ó *A* y *B*). La observación enseña, en efecto, que así se verifica, desde el momento en que *A* y *B* están separados por *C* y *E*; pero el empleo de las proposiciones *a)* y *b)* conduce al mismo resultado.

Ahora bien; dados *E, B* y *A*, podemos elegir *D, e)*, de tal modo que esté entre *B* y *E*, por exclusión de *A*, esto es, que *B* y *E* estén separados por *D* y *A*, y, por consiguiente, *D* y *A* por *B* y *E, g)*, es decir, que *B* esté situado entre *A* y *D*, por exclusión de *F*.

De los teoremas 6.°, 7.°, 10.° y 11.°, fueron deducidos los 12.° á 17.° Con las proposiciones *b), c)* y *d)* se puede proceder análogamente; de las así obtenidas mencionaremos únicamente estas dos, que corresponden á los teoremas 12.° y 15.°

h) *Si, respecto del punto límite* E, D *está entre* A *y* B, *pero*

no entre B *y* C, *estará entre* A *y* C, *con relación al mismo punto límite.*

i) *Si, respecto del punto límite* E, D *está entre* A *y* B *y, al mismo tiempo, entre* A *y* C, *no está entre* B *y* C, *con relación al mismo punto límite.*

Utilizando ahora la proposición *g)*, se deduce: Si *D* y *E* están separados por *A* y *B*, pero no por *B* y *C*, *D* y *E* lo están por *A* y *C* (*); si *D* y *E* están separados por *A* y *B* y por *A* y *C*, no lo están por *B* y *C;* si *D* y *E* no están separados por *A* y *C* ni por *B* y *C*, tampoco lo están por *A* y *B*. Es decir:

k) *Si* A *y* B *están separados por uno de los pares* CE *y* DE, *pero no por el otro,* A *y* B *están separados por* C *y* D.

l) *Si* A *y* B *están separados por los pares* CE *y* DE, *ó no lo están por ninguno de ellos, tampoco están separados por* C *y* D.

De otro modo: *si el par* AB *está separado por el* CD, *también lo está por uno de los pares* CE *y* DE, *pero no por el otro.*

Las proposiciones *a)* á *e)* pueden ser consideradas como axiomas; de ellas se han deducido las designadas por *f)* á *l)*. Así como los teoremas 10.° y 11.° se deducían de los 7.° y 12.°, las proposiciones *c)* y *d)* son consecuencia de las *b)* y *h)*, ó también de las *a)*, *b)* y *k)*, puesto que la *h)* lo es de las *g)* y *k)*, y la *g)* lo es de las *a)* y *b)*. Así, pues, con la ayuda de las proposiciones *a)*, *b)*, *l)* y *k)*, exclusivamente, se pueden demostrar todas las restantes proposiciones del grupo *a)* á *l)*.

11. Mediante la consideración de un punto fijo *E*, se ha logrado extender á la línea cerrada los conceptos adquiridos en la línea limitada; aparece así la línea cerrada, mediante la exclusión del punto *E*, como completamente análoga á la línea limitada. Y todavía se puede, recíprocamente, extender á la línea limitada el concepto de puntos separados; los teoremas *k)* y *l)* enseñan de qué modo puede hacerse esto. Limitándonos ahora á la línea recta, podemos dar la siguiente definición:

Definición 4.ª—Si, en una recta, uno de los puntos *C* y *D*

(*) Según *g)*, *A* y *B* están separados por *D* y *E*, mas *B* y *C* no lo están por *D* y *E*; es decir, respecto del punto límite *E*, *D* está entre *A* y *B*, pero no entre *B* y *C*, luego *h)* está entre *A* y *C*, ó lo que es lo mismo, *A* y *C* están separadas por *D* y *E*, y recíprocamente *g)*. Análogamente puede procederse para los otros casos.—*(N. T.)*

está entre *A* y *B*, pero no lo está el otro, diremos que los puntos *A* y *B* están separados por los *C* y *D*, ó que *C* está entre *A* y *B* por exclusión de *D*, ó respecto del punto de límite *D*.

La posibilidad de permutar *A* con *B*, y *C* con *D*, está fundada en la misma definición. Por consiguiente, la proposición *a)* es aplicable á la línea recta, y debe demostrarse que también las proposiciones *b)*, *l)* y *k)* conservan su validez. Con esto, sin más demostración, quedará probado que todas las proposiciones *a)* á *l)* subsisten.

TEOREMA 19.° *Si* A, B, C *y* E *son puntos de una recta, están separados* B *y* C *por* A *y* E, *ó* C *y* A *por* B *y* E, *ó* A *y* B *por* C *y* E, *y cada una de estas posiciones excluye á las otras dos.*

En efecto, se puede designar á los puntos *A*, *B* y *C* de tal modo, que *A* esté entre *B* y *C* (T. 6.°). Haciéndolo así, ó *B* está entre *C* y *E*, ó *C* está entre *B* y *E*, ó *E* está entre *B* y C (T. 6.°). En el primer caso, están *B* entre *C* y *E*, y *A* entre *B* y *C*; por consiguiente, *A* entre *C* y *E* (T. 10.°) y *B* entre *A* y *E* (T. 13.°); resulta, pues (T. 7.° y D. 4.ª), que *B* y *C* están separados por *A* y *E*, pero ni *C* y *A* lo están por *B* y *E*, ni *A* y *B* por *C* y *E*.

El segundo caso resulta de trocar *B* y *C* y, por tanto, conduce al mismo resultado.

En el tercer caso, *A* y *E* están entre *B* y *C* y, por consiguiente, *A* está entre *B* y *E* ó entre *C* y *E* (T. 11.°). Si está *A* entre *B* y *E* y, por tanto, *E* entre *A* y *C* (T. 13.°), según el T. 7.° y la D. 4.ª, *A* y *C* estarán separados por *B* y *E*, pero no lo estarán *B* y *C* por *A* y *E*, ni *A* y *B* por *C* y *E*. Si estuviera *A* entre *C* y *E*, estarían separados *A* y *B* por *C* y *E*; pero no *B* y *C* por *A* y *E*, ni *A* y *C* por *B* y *E* (T. 7.° y D. 4.ª).

TEOREMA 20.°—*Si* A, B *y* E *son puntos de una recta, se puede elegir sobre ella el punto* C, *de modo que* A *y* B *estén separados por* C *y* E.

En efecto. Si *E* no está entre *A* y *B*, se elige *C* entre *A* y *B* (T. 8.°). Si *E* está entre *A* y *B*, se elige *C* de modo que *B* quede entre *A* y *C*, ó *A* entre *B* y *C* (T. 9.°), y, por tanto, que *C* no esté entre *A* y *B* (T. 7.°). En ambos casos, *A* y *B* están separados por *C* y *E* (D. 7.ª).

TEOREMA 21.°—*Si en una recta los puntos* A *y* B *están sepa-*

rados por los de uno de los pares CE *y* DE, *pero no por el otro, lo estarán por* C *y* D.

En efecto; supongamos, por ejemplo, que *A* y *B* están separados por *C* y *E*, mas no por *D* y *E*. Si *C* está entre *A* y *B*, en cuyo caso *E* no lo está (D. 4.ª), tampoco *D* estará entre *A* y *B*. Si, por el contrario, no está *C* entre *A* y *B*, entre ellos estará *E* (D. 4.ª) y, por consiguiente, también *D*.

En ambos casos, según la definición 4.ª, *A* y *B* están separadas por *C* y *D*.

Con esto queda efectuado el paso de las proposiciones *a)*, *b)*, *e)* y *k)* á las que se refieren á los puntos de una recta.

Sin necesidad de más razonamiento, se unen á las tres proposiciones obtenidas las consecuencias que corresponden á las restantes proposiciones del grupo anterior. Las *g)* y *l)* dan lugar á las dos siguientes:

TEOREMA 22.º—(Recíproco del anterior). *Si* A, B, C, D y E *son puntos de una recta, y los* A *y* B *están separados por los* C *y* D, *también lo estarán por uno de los pares* CE *y* DE, *pero no por el otro.*

TEOREMA 23.º—*Si* A, B, C *y* E *son puntos de una recta, y los* A *y* B *están separados por los* C *y* E, *también los* C *y* E *lo están por los* A *y* B.

En virtud de estos resultados, puede considerarse la recta como si fuese una línea cerrada.

12. En el curso de la exposición, se han agregado á los conceptos geométricos primeramente introducidos otros nuevos, que, sin embargo, se han reducido á aquéllos. Los llamaremos conceptos derivados, y á los otros conceptos fundamentales. Los conceptos derivados han sido definidos, utilizando para ello siempre los precedentes, pero ningún otro, y cuantas veces se ha hecho aplicación de un concepto derivado, ha sido refiriéndose, inmediata ó mediatamente, á su definición; sin tal referencia, no hubiera sido posible la demostración correspondiente. Los conceptos fundamentales no han sido definidos; pues no hay definición alguna capaz de sustituir á la observación de objetos naturales adecuados, la cual se apoya exclusivamente en la comprensión de conceptos simples que no pueden ser reducidos á otros. Cuando Euclides dice: «Punto es lo que no tiene parte alguna; línea es una longitud sin anchura; línea recta (segmento) es la

que se apoya uniformemente en todos sus puntos»; define los citados conceptos por medio de propiedades que, ni entonces, ni en ulteriores desarrollos, pueden comprobarse. En efecto; en ninguna parte se apoya en conocimientos de los que, fuera de los «Elementos», pueda adquirir el lector que por repetidas observaciones no tenga ya formada de antemano idea de los conceptos geométricos fundamentales; á lo más, hace recordar la representación correspondiente y da ocasión para restringirla ó completarla, conforme á las exigencias científicas.

La Matemática establece relaciones entre los conceptos matemáticos, que deben estar de acuerdo con los hechos experimentales, aunque en su mayor parte no se toman directamente de la experiencia, sino que son «demostradas»; los mismos conocimientos precisos para la demostración (aparte las definiciones de los conceptos derivados) constituyen una parte de tales relaciones. Si se prescinde de las proposiciones basadas en la demostración—los teoremas—, queda un grupo de proposiciones, de las cuales pueden deducirse todos los demás—los axiomas—; éstos se fundan directamente en observaciones (*) que, claro es, vienen repitiéndose sin cesar desde tiempo inmemorial y son más sencillas que las de cualquier otra especie, lo cual ha dado lugar á que, familiarizados con ellas los hombres, de mucho tiempo atrás, su origen haya caído en el olvido y pueda ser objeto de discusión.

Los axiomas deben contener todo el material empírico necesario para construir la Matemática, de tal modo que, una vez sentados, no sea preciso recurrir más al testimonio de los sentidos. Para obrar con mayor seguridad, deben establecerse de antemano las restricciones á que esté supeditada la aplicación de cada axioma. Así vamos á hacer ahora en una parte de los axiomas geométricos antes puestos, en los I y VI, En el primer axioma, los puntos que se unen por medio de un segmento rectilíneo no deben tomarse demasiado próximos. En tanto que tales puntos estén separados por intervalos aprecia-

*) HELMHOLTZ ha sometido á un análisis riguroso el origen empírico de los axiomas geométricos en su conferencia «Über der Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome» (*Populäre wissenschafteiche Vorträge*, de H. HELMHOLTZ, 3.er cuaderno. Brunswick, 1876).

bles, la restricción parece ociosa. Tal es, en efecto, lo que ocurre en las figuras de cuya observación se derivan los axiomas; en ellas es, pues, aplicable siempre el teorema 8.°—único al que la restricción alcanza—. La reiterada aplicación de este teorema hace perder, sin embargo, su primitivo carácter á la figura. Si A y B son puntos de la figura primeramente considerada, y en la recta AB se toma un punto C entre A y B; después uno C_1 entre A y C, uno C_2 entre A y C_1, y así sucesivamente, cada vez se aproxima más al punto A, y llega un momento en que hay que renunciar á nuevas intercalaciones (*). Resulta, pues, que el teorema 8.° no es aplicable un número cualquiera de veces á la misma recta. Indudablemente, no se puede marcar un límite perfectamente definido á tal aplicación; pero hay que guardarse de, porque no haya límite asignable bien determinado, deducir la no existencia de todo límite.

A C_2 C_1 C B

Los conceptos geométricos fundamentales y los axiomas se adquieren sobre objetos, de los cuales se está, relativamente, poco alejado; fuera de tal dominio, no es, pues, legítima su aplicación, si ulteriores razones no la consienten. Supongamos, por ejemplo, que se parte de un segmento rectilíneo AB; si lo prolongamos (A. VI) desde B hasta B_1; después, el BB_1, desde B_1 hasta B_2, el B_1B_2 desde B_2 hasta B_3, y así sucesivamente, se irán obteniendo nuevos segmentos AB_1, AB_2, AB_3 .....; pero al cabo de cierto tiempo se llegará á un punto B_n, tal que no se podrá hablar del segmento que lo une con el punto A, sin que este concepto pierda su carácter de fundamental. Es cierto que se dice también (supuesto que á toda sucesión de segmentos rectilíneos, en la cual cada dos consecutivos componen otro, se le llame, á su vez, segmento) que se prolonga el segmento AB hasta B_1, el AB_1 hasta B_2, el AB_2 hasta B_3, y así sucesivamente; pero esto no modifica nada, en realidad, el modo de obtener los puntos B_1, B_2, B_3 ....., pues si B_n se ha alejado demasiado de A, para hallar B_{n+1} no se puede ya utilizar A, sino B_{n-1}. Por consiguiente, tampoco puede hacerse uso del axioma VI (ó del teorema 9.°) (**) un número cual-

A B B_1 B_2 B_3

(*) Véase la explicación circunstanciada en el § **23**.

(**) El teorema 20.° se funda en los 8.° y 9.°

quiera de veces en la misma figura, y aquí, como antes, no existe límite bien definido para esta aplicación.

Los desarrollos que siguen, suponen siempre, como los anteriores, figuras cuyas partes están bastante próximas unas de otras, para que se sea posible un análisis directo de sus relaciones geométricas (*).

Todas las aplicaciones de la Geometría se pueden

(*) Véanse Riemann: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, 1867, tomo XIII, pág. 15, ó también Gesammelte mathematische Werke, 1.ª edición, 1876, pág 266; 2.ª edición, 1892, página 284, y Klein: *Mathematische Annalen*, 1871, tomo IV, páginas 576 y 624; 1873, tomo VI, pág. 134. *(N. A.)* (**)

(**) Son tan interesantes los párrafos citados de la notable Memoria de Klein, «Über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie», *Math. Annalen*, tomo 4.º, pág. 576, la cual, junto al trabajo citado de Riemann (cuyas ideas, apenas esbozadas por éste, desarrolla) constituyen los fundamentos de la Geometria llamada *de Riemann* ó *elíptica*, que nos parece oportuno reproducirlos á continuación:

«..... En el trabajo de Riemann se hace observar que de la carencia de límites del espacio no se deduce necesariamente su infinitud. Antes bien, sería concebible y no contradictorio con nuestro modo de ver, el cual se refiere siempre á una parte del espacio solamente, que el espacio fuese finito y reentrante en sí mismo; la Geometría de nuestro espacio aparecería entonces como la Geometría sobre una esfera de tres dimensiones situada en una variedad de cuatro.»

«Esta concepción, que también se halla en el trabajo de Helmholtz «Über die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», *Göthinger Nachrichten*, 1868, traeria por consecuencia, que la suma de ángulos en el triángulo (lo mismo que en el triángulo esférico ordinario) sería mayor que dos rectos; y tanto mayor, cuanto más grande fuese el área del triángulo. La linea recta no tendria entonces ningún punto á distancia infinita, y no se podria trazar por un punto dado ninguna paralela á una recta.»

«Una Geometria fundada en esta concepción, se colocaría al lado de la Geometría euclidiana ordinaria, de modo completamente igual que la mencionada Geometría de Gauss, Lobatchefsky y Bolyai. Mientras la última atribuye á las rectas dos puntos indefinidamente lejanos, en aquélla no se admite ninguno. Como caso intermedio de transición entre ambas, queda la Geometría euclidiana; ésta supone en cada recta dos puntos confundidos indefinidamente lejanos.»

«Empleando una expresión frecuente en la Geometria moderna, deben designarse estas tres geometrías, en lo sucesivo, con los nombres de *hiperbólica, elíptica* y *parabólica*, respectivamente, según que los dos puntos del infinito de la recta sean reales, imaginarios ó coincidentes.»—*(N. T.)*

reducir á las conexiones de dichas figuras, cuestión ésta que no debe ser examinada aquí por extenso. No obstante, evidenciaremos, por medio de sencillísimas consideraciones, cómo conceptos y leyes geométricas que se comprueban en el interior de un campo limitado, pierden su validez por reiterada ampliación del mismo. Supongamos que en una línea cerrada (simple) se mueve un observador, quien en todo momento puede ver una pequeña parte de la línea, y, en general, no puede recorrer más que una parte de la misma, por lo cual no puede todavía saber que la línea es cerrada. Este observador, dentro del camino por él contemplado en cada momento, llegará á adquirir nociones como las expuestas en las proposiciones 6.ª á 11.ª para la línea recta, y las extenderá después á todo el campo á él accesible; finalmente, tratará de generalizarla á la línea en toda su extensión; pero, si tal hace, llegará naturalmente, á una conclusión falsa. Sean, por ejemplo, A y B puntos poco alejados uno de otro, y supongamos que, continuando el camino AB por el extremo B, se llega al punto M; si se dice, entonces, que B está situado entre A y M, y además, que A no está situado entre B y M, se niega con esto la posibilidad, realmente existente, de alcanzar el punto M, siguiendo el camino BA más allá del punto A.

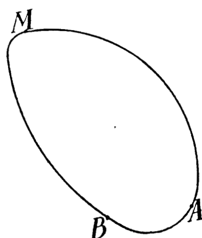


Fig. 3.ª

Esta observación merece tenerse en cuenta, entre otras cuestiones, en la siguiente: Si las figuras ABC y CDA (no ADC) son congruentes (§ **13**) (*) y los puntos B y D están á distinto lado de la recta AC, ¿pueden tener las rectas AB y CD un punto común? Las figuras $ABCD$ y $CDAB$ son congruentes, y los segmentos rectilíneos AB y CD no tienen nin-

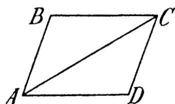


Fig. 4.ª

(*) Esto es, pueden superponerse de modo que coincidan todos sus elementos.—*(N. T.)*

gún punto común. Sentado esto, suele razonarse así: Si las rectas *AB* y *CD* tuviesen común el punto *M*, las figuras *ABCDM* y *CDABM* serían congruentes y *M* estaría situado fuera del segmento *AB*; si, por ejemplo, estuviera *B* entre *A* y *M*, también estaría *D* entre *C* y *M*, luego *D* y *M* quedarían al mismo lado de *BC*, y lo mismo *A* y *M* (*), esto es, *A* estaría entre *B* y *M*, lo cual no es posible.

Sin embargo, no queda con esto resuelta la cuestión; pues quizás no sea lícito aplicar algunos conceptos geométricos y proposiciones del modo como se acaba de hacer.

Adición al § 1.

En la época en que se compuso esta obra no se apreciaban aún en todo su alcance los postulados en ella incluídos, cuya importancia hemos hecho resaltar. El ensayo realizado conduce, á pesar de la exclusión de las figuras curvas, á una inesperada porción de particularidades.

En el § **1** hemos analizado la materia tan por extenso, que se ha llegado á escudriñar hasta los últimos elementos. No era conveniente seguir exactamente el mismo procedimiento en los restantes artículos. Si hubiésemos continuado este análisis, no hubiera podido pasar inadvertido que los hechos, mediante los cuales queda justificada la posibilidad de las construcciones, no están completamente estudiados. Muchos de ellos se han enunciado en los axiomas I, II y VI del § **1**, en todos los del § **2** y en los II, IV, VIII y IX del § **14**, pero han quedado sin enunciar explícitamente otros varios de la misma índole, por ejemplo, la propiedad «Dados dos puntos *A* y *B* se puede elegir otro *C*, de tal modo que *A*, *B* y *C* no pertenezcan á un segmento rectilíneo».

Puede ser un ejercicio útil para el lector hallar los axiomas que faltan, completando de este modo los principios fundamentales de la Geometría proyectiva (**).

(*) Por estar *A* y *D* al mismo lado de *BC*.—*(N. T.)*

(**) Más recientemente, en las ya clásicas obras de Hilbert y Schur tituladas *Grundlagen der Geometrie*, se enuncian, en efecto, la existencia de puntos fuera de la recta, y fuera del plano, como axiomas ó postulados fundamentales para la construcción de la Geometría de dos y tres dimensiones.—*(N. T.)*

§ 2.—Del plano

13. Vamos á considerar ahora un concepto geométrico más amplio que la recta, el plano. Con significación análoga á la dada al tratar de la recta, se dice del plano que es ilimitado; pero si nos atenemos á la observación inmediata, sólo podemos conocer la superficie plana limitada. Según esto, se tratará, en primer lugar, únicamente de la superficie plana y de puntos de una superficie plana, y el concepto de «plano» será introducido después.

Las siguientes proposiciones son, en parte, axiomas y, en parte, teoremas. Para la demostración de las últimas podemos hacer uso de las proposiciones sentadas en el § **1**. Las primeras son expresión de algunas observaciones, que pueden hacerse fácilmente en las figuras planas.

14. Por tres puntos arbitrarios, A, B y C, puede pasar un plano, aunque no estén en una recta única. Si por A y B se traza ahora un segmento rectilíneo, no es condición precisa que todos sus puntos estén en aquella superficie; pero se puede prolongar, en caso necesario, la superficie plana en una que contenga el segmento, es decir, todos sus puntos.

Axioma I. *Por tres puntos cualesquiera se puede hacer pasar una superficie plana.*

Axioma II. *Si por dos puntos de una superficie plana se traza un segmento rectilíneo, existe una superficie plana que contiene todos los puntos de la anterior y también el segmento.*

15. Si se dan dos superficies planas, puede un punto *A* estar contenida en las dos al mismo tiempo. En tal caso, vemos siempre que el punto *A* no es el único punto común, prolongando, en caso necesario, una ó las dos superficies.

AXIOMA III. *Si dos superficies planas,* P *y* P′, *tienen un punto común, se puede asegurar que hay otro que está en una superficie plana con todos los puntos de la* P, *y en otra con todos los de la* P′.

Puede ocurrir también que dos superficies planas contengan al mismo tiempo tres puntos. En el análisis de este caso puede utilizarse una observación que también es necesaria para responder á la cuestión relativa al encuentro de líneas. Consideremos en una superficie plana tres puntos *A*, *B* y *C*, vértices de un triángulo, es decir, unidos de dos en dos por los segmentos rectilíneos *AB*, *AC* y *BC*. Sea *DE* un segmento rectilíneo contenido en la misma superficie, y tal que contenga un punto *F* interior al segmento *AB*. En esta hipótesis, el segmento *DE* tiene siempre un punto común con el *AC* ó con el *BC*, ó puede ser prolongado hasta un punto de esta especie.

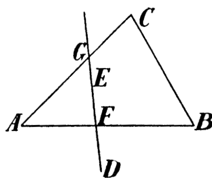


Fig. 5.ª

AXIOMA IV. *Si se unen, de dos en dos, tres puntos* A, B *y* C *de una superficie plana por medio de los segmentos* AB, AC *y* BC, *y en la misma superficie hay un segmento* DE *que pasa por un punto interior al* AB, *elsegmento* DE, *ó una prolongación del mismo, pasa por un punto de uno de los segmentos* AC *ó* BC.

Ó, de otro modo: *Si* A, B, C *y* D *son puntos de una superficie plana, y el punto* F *de la recta* AB *está entre los* A *y* B, *la recta* DF *pasa por un punto de los segmentos* AC *ó* BC.

TEOREMA 1.º—*Si los puntos* A, B, C *y* D *están en una superficie plana* P, *y, al mismo tiempo, los* A, B *y* C *en otra* P′, *pero sin estar en línea recta, existe una superficie plana que contiene todos los puntos de* P′ *y también el punto* D.

En efecto; si el punto *D* está en una de las rectas *AB*, *AC* ó *BC*, la aplicación del segundo axioma demuestra la verdad del enunciado. Si el punto *D* no está en ninguna de di-

chas tres rectas, tomemos un punto F situado en la AB, entre los puntos A y B, y supongamos (Ax. IV) que la recta DF pasa por un punto, tal como el G, del segmento AC; F y G son distintos uno de otro, y D está en la recta FG. Según el axioma II, existe una superficie plana Q que contiene todos los puntos de P' y también F; además, otra Q' que contiene todos los puntos de Q y también G; finalmente, una que contiene todos los puntos de Q' y también D.

Partamos ahora de tres puntos arbitrarios A, B y C, no situados en línea recta, y hagamos pasar por ellos una superficie plana. Si por los puntos A, B, C y otro D, distinto de ellos, se puede hacer pasar asimismo una superficie plana, no es para ello preciso que el punto D pertenezca á la primera, sino que, caso necesario, puede ésta prolongarse hasta contener también el punto D (T. 1.º). Por esto se dice que el punto D está en el plano de los puntos A, B y C, ó, simplemente, en el plano ABC, ó que el plano ABC pasa por D, que D es un punto del plano ABC, etc.

TEOREMA 2.º—*Por tres puntos se puede hacer pasar siempre un plano.*

Sean L, M y N tres puntos cualesquiera. Si no están en una recta, sean A un punto de la recta LM, B uno de la LN y C uno de la MN; se puede, entonces, tomar una superficie plana que contenga los puntos L, M, N, y, por consiguiente, también los L, M, N, A, B y C. Si L, M y N están en una recta, sean A un punto exterior á ella, B uno de la AL y C uno de la AM; se puede, en tal caso, hacer pasar una superficie plana por A, L y M, la cual pasa, por tanto, también por A, B, C, L, M y N. En ambos casos, A, B y C son puntos que no están en línea recta, y L, M y N están en el plano ABC.

TEOREMA 3.º—*Todo plano está determinado por tres cualesquiera de sus puntos, no situados en línea recta.* O, de otro modo: *tres puntos que pertenezcan á la vez á dos planos están en una recta.*

Sean, en primer lugar, A' un punto del plano ABC, y A', B y C puntos que no pertenecen á una recta (por consiguiente, A un punto del plano $A'BC$). Si en el plano $A'BC$ se toma un punto D, distinto del A, los puntos A, B, C, D y A' están en una superficie plana, luego D está en el plano ABC, y si llamamos á los puntos A, B y C «puntos del plano ABC»,

podemos afirmar que cada punto del plano $A'BC$ pertenece, al mismo tiempo, al plano ABC; recíprocamente, también todos los puntos del plano ABC son del $A'BC$; luego es lícito decir que los dos planos ABC y $A'BC$ se confunden.

Esto sentado, sean A', B' y C' puntos cualesquiera del plano ABC, pero no situados en línea recta. El punto A' puede estar en una de las rectas AB, AC y BC, y á lo más en dos; supongamos que está fuera de la BC; entonces los dos planos ABC y $A'BC$ se confunden. El punto B' está en el plano $A'BC$, pero no en las rectas $A'B$ y $A'C$ al mismo tiempo; si está fuera de la $A'C$, por ejemplo, los planos $A'BC$ y $A'B'C$ coinciden. Por último, el punto C' está en el plano $A'B'C$, pero no en la recta $A'B'$; luego los planos $A'B'C$ y $A'B'C'$ son idénticos.

Ordinariamente, para designar un plano se usa una sola letra. Si A, B y C son puntos del plano P que no están en línea recta, el plano ABC se representa por P.

15. Tomemos ahora, á capricho, dos puntos A y B en una recta r, y en un plano P, que pase por ellos, el punto C, exterior á la recta r. Si D es un tercer punto cualquiera de la recta r, se podrá hacer pasar una superficie plana por los puntos A, B y C, la cual pasará, además, por el punto D, es decir, que este punto está en el plano ABC ó P. Como lo mismo ocurre á todos los puntos de la recta r, se dice que la recta r está en el plano P, que r es una recta del plano P, etcétera.

TEOREMA 4.º—*Una recta, que tiene dos puntos comunes con un plano, está contenida por entero en él.* Ó, de otro modo: *todos los planos que tienen comunes dos puntos, contienen la recta que los une.*

Si la recta r no está contenida en el plano P, no puede tener con él más de un punto común. Cuando tiene uno A, y sólo uno, se dice que la recta y el plano se cortan en él; este punto se llama entonces punto de intersección de r y P, y se designa por rP ó Pr.

Para la determinación de un plano puede utilizarse la recta. Si r y C son, respectivamente, una recta y un punto dados, y tomamos, en la primera dos puntos arbitrarios A y B (distintos del C), por A, B y C se puede hacer pasar un plano, el cual contendrá la recta r.

Teorema 5.°—*Por una recta y un punto siempre se puede hacer pasar un plano.*

Si P es un plano que contiene la recta r y el punto C, y, por consiguiente, los puntos A, B y C, no hay ningún otro plano que pase por r y C, si este punto está fuera de la recta AB; en tal caso queda determinado el plano por r y C y puede ser designado por rC ó Cr.

Teorema 6.°—*Todo plano está determinado por una cualquiera de sus rectas y uno cualquiera de sus puntos, no situado en ella.* De otro modo: *dos planos que tienen una recta común no tienen común ningún punto fuera de ella.* O también: *si un punto y una recta están en dos planos distintos, la recta pasa por el punto.*

Dos rectas r y s, que se cortan, están siempre en un plano. En efecto; si existe un punto de intersección rs, podremos tomar en la recta s un punto arbitrario C (distinto del rs), y el plano rC pasa entonces por los puntos C y rs; luego, también por la recta s.

Teorema 7.°—*Por dos rectas que tienen un punto común se puede hacer pasar siempre un plano.* O también: *dos rectas que no están en un plano, no tienen ningún punto común.*

Sean r y s dos rectas cualesquiera de un plano P. Si se toma sobre la recta s un punto arbitrario C (fuera de la r), el plano P es el mismo sC, y no hay ningún otro plano que pase al mismo tiempo por r y s. El plano de las dos rectas r y s puede designarse por rs; pero conviene no olvidar que la misma notación se usa para el punto de intersección de las dos rectas, cuando éstas se cortan.

Teorema 8.°—*Todo plano está determinado por dos cualesquiera de sus rectas.*

16. Consideremos ahora dos planos P y Q, que tienen un punto común A. Si tomamos dos puntos cualesquiera B y C en el plano P, y otros dos, también arbitrarios, D y E, en el plano Q, pero tales que ni aquéllos ni éstos están en una recta con A, según el tercer axioma, existe un punto F tal que, tanto los puntos A, B, C y F, como los A, D, E y F, forman figuras planas. Resulta, pues, que el punto F está tanto en el plano ABC, como en el ADE; esto es, en los planos P y Q. Estos planos tienen, pues, la recta AF común.

TEOREMA 9.°—*Si dos planos tienen un punto común, tienen común una recta.*

La recta contiene todos los puntos comunes á los dos planos. Se le llama línea de intersección, y á sus puntos, puntos de intersección de los dos planos. La recta de intersección de los planos P y Q se designa por PQ.

Tres planos P, Q y R pueden tener común un punto A. Si A no es el único punto común, los tres planos tienen común una recta. Cuando los planos P, Q y R se encuentran sólo en el punto A, este punto se llama de intersección de los planos, y se le designa por PQR; en este caso, cada dos planos tienen una recta común y las tres rectas de intersección son distintas, pero se encuentran en el punto A.

Sean ahora de un modo general tres planos P, Q y R, que se cortan de dos en dos. Si dos cualesquiera de las rectas de intersección, por ejemplo, las PQ y PR, tienen un punto común A, en él se cortan los tres planos. Si la recta de intersección de dos de los planos corta al tercero, el punto de intersección es, como antes, común á los tres planos. Si dos de las rectas de intersección se confunden, también se confunde con ellas la tercera.

17. Un grupo arbitrario de puntos, ó de rectas, ó de puntos y rectas de un plano recibe el nombre de figura plana. Una figura plana puede ser ampliada, bien por la agregación de otros puntos y rectas arbitrarias del mismo plano, bien por construcción, esto es, por la unión de puntos de la figura y por la obtención de los puntos comunes á sus rectas. Tales construcciones se realizan sin salir del plano.

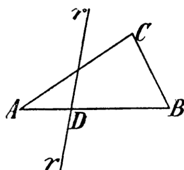


Fig. 6.ª

Para fijar la existencia del punto de intersección de dos rectas se aplica frecuentemente el siguiente teorema, que resulta inmediatamente del axioma IV.

TEOREMA 10.°—*Si* A, B y C *son tres puntos no situados en una recta,* D *un punto de la recta* AB, *comprendido entre los* A *y* B, *y* r *una recta del plano* ABC, *que pasa por* D, *pero no por* A, B *ni* C, *la recta* r *encuentra á la* AC *entre* A *y* C, *ó á la* AB *entre* B *y* C.

En lo sucesivo no nos referiremos ni á los axiomas ni al teorema 1.° de este artículo. De los nueve teoremas restantes, los 5.° á 8.° son consecuencias de los 2.° á 4.° En cuanto al 10.°, hay que formular la misma restricción que para el 8.° teorema del § **1**.

Añadamos aún algunas consecuencias que se relacionan con el teorema 10.°

TEOREMA 11.°—*Si* A, B *y* C *son tres puntos no situados en una recta*, A_1 *un punto de la recta* BC *comprendido entre los* B *y* C, C_1 *un punto de la recta* AC *comprendido entre los* A *y* C, *y* C_1 *un punto de la recta* AB *comprendido entre los* A *y* B, *los puntos* A_1, B_1 *y* C_1 *no están en línea recta.*

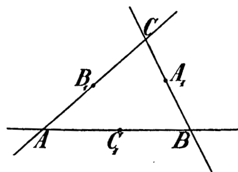


Fig 7.ª

En efecto, el punto A_1 no puede estar en el interior del segmento $B_1 C_1$, pues, de otro modo (T. 10.°), la recta BC sería cortada por la AB_1 entre A y B, ó por la AC_1 entre A y C_1 (*). Del mismo modo se ve que ni el punto B_1 puede ser interior al segmento $A_1 C_1$, ni el C_1 al segmento $A_1 B_1$ (**).

TEOREMA 12.°—*Si cuatro puntos* A, B, C *y* D *están en un plano, las rectas de uno, al menos, de los pares* AD, BC; BD, AC, *y* CD, AB *tienen un punto común.*

En efecto, si tres de los puntos dados están en línea recta, hay tres, por lo menos, de los puntos indicados en el enunciado (***). Si no ocurre así y, por consiguiente, las rectas AD,

---

(*) La aplicación del teorema 10.° ha de hacerse substituyendo los elementos B, C, D y r de su enunciado por los A_1, B_1, C_1 y BC, respectivamente.—*(N. T.)*

(**) Estas conclusiones demuestran la verdad del enunciado, puesto que, según el teorema 6.° del § **1**, si los tres puntos A_1, B_1 y C_1 perteneciesen á una recta, uno de ellos debería estar entre los otros dos.—*(N. T.)*

(***) Si los cuatro puntos están en una recta, cada uno de ellos es común á los tres pares de rectas contenidos en el enunciado. Si sólo tres de los puntos, los A, B y C, por ejemplo, están en línea recta, cada uno de ellos es común á uno de aquellos pares; el A al par AD, BC; el B al par BD, AC, y el C al par CD, AB.—*(N. T.)*

BD y CD son distintas, basta hacer ver que las rectas CD y AB se cortan, cuando ni la recta AD y el segmento BC, ni la recta BD y el segmento AC tienen un punto común. En tal hipótesis, si se prolonga el segmento AD, por el extremo D, hasta el punto A', la recta AC será cortada por la BD de un punto M situado entre A' y C (T. 10.°), y el punto D estará fuera del segmento BM, puesto que, de no ser así, la recta AD sería cortada por la CM en un punto comprendido entre los C y M, ó por la BC en uno entre los B y C (T. 10.°). No teniendo, pues, la recta CD ningún punto común con el segmento $A'M$ ni con el BM, tampoco lo tendrá con el segmento $A'B$, luego encontrará á la recta AB entre A y B.

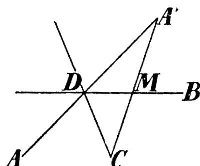


Fig. 8.ª

Adición al § 2.

(Véase *Mathematische Annalen,* 1897, tomo XLVIII, pág. 111.)

TEOREMA 13.°—*Si* A, B *y* C *son tres puntos no situados en línea recta,* A_1 *un punto de la recta* BC, *entre* B *y* C, *y* B_1 *un punto de la recta* CA, *entre* A *y* C, A_1 *es distinto de* AB_1 *es distinto de* B *y las rectas* A_1A *y* B_1B *son distintas y se cortan en un punto* D, *situado al mismo tiempo entre* A *y* A_1 *y entre* B *y* B_1, *que no está en ninguna de las rectas* BC, CA *y* AB.

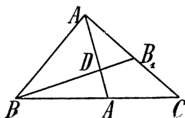


Fig. 9.ª

En efecto; como A no pertenece á la recta BC, A_1 es distinto de A y, más general, de A, B, C y B_1, y no está en ninguna de las rectas AB y CA; análogamente, B_1 es distinto de A, B y C y no está en ninguna de las rectas AB y BC; por consiguiente, son distintas las rectas A_1A y B_1B, y también las rectas A_1B (es decir, BC) y B_1B. Como los puntos A_1, A y C no están en línea recta, determinan un plano A_1AC, el cual contie-

ne las rectas AC y A_1C, por consiguiente, los puntos B_1 y B y, finalmente, la recta B_1B. La recta B_1B no pasa por ninguno de los puntos A_1, A y C, y encuentra á la recta CA en B_1, entre A y C, y á la A_1C en B, no situado entre A_1 y C; por consiguiente (§ **1**, T. 10.°), la recta B_1B encuentra á la A_1A en un punto D, situado entre A_1 y A y, también, entre B_1 y B. Como B y C no están sobre A_1A, el punto D es distinto de B y C y, en general, de A_1, A, B y C; no pertenece, pues, á ninguna de las rectas BC, CA y AB.

TEOREMA 14.°—*Si tres cualesquiera de los puntos* A, B, C *y* D *no están en línea recta, la recta* AD *pasa por un punto* A_1 *del segmento* BC *y la recta* BD *por un punto del segmento* CA, *la recta* CD *pasará por un punto del segmento* AB *(fig. 9.ª)*

En efecto; la posibilidad de la hipótesis resulta del teorema 13.° Recíprocamente, supuestas cumplidas las condiciones del enunciado, los puntos A_1, B_1, A, B y C son distintos, y queda cumplida, por tanto, la hipótesis del teorema 13.° Según éste, las rectas A_1A y B_1B son distintas; éstas se cortan, por una parte, en un punto E, entre A_1 y A y, por otra, en D; luego D coincide con E y está entre A_1 y A. Como los puntos A_1, A y B no están en línea recta, determinan un plano A_1AB, el cual contiene los puntos C y D y, por consiguiente, la recta CD. Esta no pasa por ninguno de los puntos A_1, A y B y encuentra á la recta A_1A en D, entre A_1 y A, y á la recta A_1B en C, no situado entre A_1 y B, luego (§ **1**, T. 10.°) la recta CD encuentra á la AB entre A y B.

§ 3.—Del haz de rectas

18. Si se toman tres puntos *A*, *B* y *C* en una recta *m*, uno de ellos debe estar situado entre los otros dos. Según se indicó ya en el § **1**, se dice que los puntos *A* y *B* están al mismo lado del *C* cuando éste no está entre aquéllos y, por el contrario, que están á distintos lados del *C* cuando éste se halla entre *A* y *B*.

Fijemos un punto *V* en la recta *m*. Si *A*, *B* y *C* son tres puntos de la recta *m* (distintos del *V)*, de la posición relativa de dos pares de los formados por estos puntos, se deduce la del tercer par del siguiente modo:

Si A *y* B *están al mismo lado de* V, *y* A *y* C *á distintos lados*, B *y* C *están á distintos lados*. Pues, ó *A* está entre *B* y *V* y, por consiguiente, como *V* está entre *A* y *C*, según lo dicho en el teorema 16.° del § **1**, *V* está entre *B* y *C*, ó *B* está entre *A* y *V* y, por tanto, como siempre está *V* entre *A* y *C*, según el teorema 13.° del § **1**, *V* está entre *B* y *C*.

Si tanto A *y* B *como* A *y* C *están del mismo lado de* V, *también* B *y* C *lo están*. Pues si *A* y *B* estuviesen al mismo lado y *B* y *C* á distintos, también *A* y *C* estarían á distintos.

Si tanto A *y* B *como* A *y* C *están á distintos lados de* V, B *y* C *estarán al mismo lado*. Pues, entonces, no estando separados *A*, y *V* por *B* y *C*, lo estarán *A* y *B* por *C* y *V*, ó *A* y *C* por *B* y *V*; luego *B* está entre *C* y *V*, ó *C* está entre *B* y *V*.

Cuando los puntos *A* y *B* están en la recta *m* del mismo lado del *V*, se puede decir que *B* está en la semirecta *VA* (no en la *A V*). Si *A′* es un punto cualquiera de la semirecta *VA* y consideramos también el punto *A* como de la semirecta *VA*, todo punto de ésta lo es de la *VA′*, y recíprocamente; puede, pues, tomarse cualquier punto de la semirecta *VA*, en sustitución del *A*, para designarla. Si los *A* y *C* están en la recta *m* á distinto lado de *V*, todo punto de la recta, distinto del *V*, pertenece á la semirecta *VA* ó á la opuesta *VC*.

Hagamos pasar ahora un plano *P* por la recta *m* y tomemos en él dos puntos *A* y *B* fuera de la recta *m*. Si esta recta no encuentra á la *AB* entre *A* y *B*, se dice que los puntos *A* y *B* están del mismo lado de la recta *m*; si *m* corta á la recta *AB* en un punto comprendido entre *A* y *B*, se dice que los dos puntos *A* y *B* están á distintos lados de *m*, ó que *m* pasa entre *A* y *B*. Si *A*, *B* y *C* son puntos del plano *P* (no situados en la recta *m*), se verifica que: *si* A *y* B *están al mismo lado de* m *y* A *y* C *á distintos lados,* B *y* C *están al mismo lado* (§§ **2**, **10**). *Si tanto* A *y* B *como* A *y* C *están al mismo lado de* m, *también lo están* B *y* C. Por último, *si tanto* A *y* B *como* A *y* C *están á distintos lados de* m, B *y* C *están al mismo* (§ **2**, T. 10.°). Si, como antes, tomamos un punto *V* en la recta *m*, resulta de lo dicho que todos los puntos de la semirecta *SM* están del mismo lado de *m* y, por consiguiente, las expresiones y las proposiciones anteriormente enunciadas pueden aplicarse á las semirectas.

19. Las líneas rectas que pasan por un punto son comparadas á los rayos de luz que parten de un punto luminoso; de aquí que se diga que forman una radiación de rectas. Así, pues, si las rectas *e*, *f* y *g* pasan por un punto *V*, se les llama rayos de una radiación, ó se dice que el rayo *g* pertenece á la radiación de los dos rayos *e* y *f*, ó que está contenido en la radiación *ef*, ó que es un rayo de la radiación *ef;* las mismas rectas *e* y *f* se llaman rayos de la radiación *ef*. Para designar una radiación (en el último sentido) basta nombrar dos cualesquiera de sus rayos; pero se puede hacer, también, valiéndose de una sola letra, que es entonces la misma (aquí *V*) utilizada para nombrar el punto *ef*. Este punto se llama el vértice ó centro de la radiación.

Muy á menudo también se usa la palabra rayo por recta, aun no tratándose de radiaciones (*).

Las líneas rectas que están en un plano y pasan por un punto, se dice que forman un haz de rectas (plano); el punto común se llama vértice ó centro del haz. Si las rectas e, f y g de un plano pasan por un punto V, se dice que el rayo g pertenece al haz ef, etc. Para designar el haz, en el último sentido, se puede hacer uso de dos cualesquiera de sus rayos; pero, si se quiere designar por la letra de su vértice, únicamente se podrá cuando, además, se dé el plano del haz.

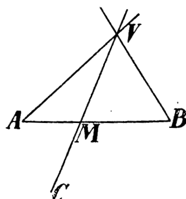


Fig. 10.

Sean ahora e, f y g rayos de un haz V del plano P, VA y VB semirectas contenidas en e y f, respectivamente, y á distintos lados de la recta g. Si el punto de intersección M del segmento AB con el rayo g está contenido en la semirecta VC del último (por consiguiente, B, C y M del mismo lado de e), esta semirecta conserva la propiedad cuando los puntos A y B se mueven en las semirectas respectivas VA y VB, y se dice que la semirecta VC está entre las VA y VB.

Encontramos aquí una completa analogía con las relaciones entre los puntos de una recta expuestas en los teoremas 7.° y 11.° del primer artículo. Así, si VA, VB, VC y VD representan semirectas contenidas en diferentes rayos de un haz, podemos decir que:

Si VC *está entre* VA *y* VB, *ni* VA *está entre* VB *y* VC, *ni* VB *está entre* VA *y* VC.

Dados VA *y* VB, *se puede escoger* VC *de modo que esté entre* VA *y* VB.

Dados VA *y* VB, *se puede escoger* VC *de modo que* VA *esté entre* VB *y* VC.

Si VC *está entre* VA *y* VB, *y* VD *está entre* VA *y* VC, VD *estará también entre* VA *y* VB.

(*) Nosotros, sin embargo, reservaremos esta palabra para designar cada elemento de una radiación, ya sea ésta de rectas ó de planos.—*(N. T)*.

Si V C *y* V D *están entre* V A *y* V B, *pero* V D *no está entre* V A *y* V C, V D *estará entre* V B *y* V C.

El teorema 6.° del primer artículo no tiene aquí análogo. Para que las semirectas VA, VB, VC, ... de un plano tengan propiedades en todo análogas á las de los puntos de una recta, deberá también ser cierta, entre otras, la correspondiente al teorema 18.° del § **1**, por cuyo medio se establece la existencia de dos semirectas VM y VN del mismo plano, entre las cuales están comprendidos aquéllas. Ahora, si éstas existen, los puntos A y N están al mismo lado de la recta VM; otro tanto ocurre con los B y N, los C y N, etc. Por consiguiente, las semirectas SA, SB, SC..... están, entonces, al mismo lado de un rayo perteneciente al haz V.

Tomemos, pues, en un plano las rectas e, f, g, ... que pasen por un punto V, en el mismo haz otra recta k, y los semirayos VA, VB, VC, ... de e, f, g, ... respectivamente, del mismo lado de k. Todos estos semirayos tienen entonces siempre la propiedad de que, *de cada tres, uno está entre los otros dos*, pues no teniendo ningún punto común la recta e con el segmento BC, ni la f con el segmento AC, la g encontrará á la AB entre A y B (véase la demostración del teorema 12.° del § **2**), y el punto de intersección está con A y B al mismo lado de k, por consiguiente, en el semirayo VC. Sean VA', VB' y VC' los semirayos opuestos á los VA, VB y VC, respectivamente. Si el semirayo VC está entre los VA y VB, también el VC' estará entre los VA' y VB', pues A' y B' están á distintos lados de g y el punto de intersección de la recta g con el segmento $A'B'$ está con A' y B' del mismo lado de k. Por esto, y sin necesidad de distinguir las semirectas, diremos que el r a y o g está e n t r e l o s e y f (ó f y e) p o r e x c l u s i ó n d e l k, ó r e s p e c t o d e l r a y o l í m i t e k. Si tomamos ahora el punto M que esté con los A y B' al mismo lado de g, la semirecta VM está entre SA y SB', es decir, el rayo k está entre los e y f, por exclusión del g. Esto se expresa diciendo que e y f están s e p a r a d o s por g y k (ó k y g).

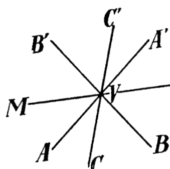


Fig. 11.

El haz de rectas se comporta, según esto, no como una línea limitada, sino como una línea cerrada. Las relaciones entre puntos de una recta expuestas en el § **1**, se verifican, sin excepción, para las semirectas AV y VB, ...; pero en ellas podemos ahora introducir los rayos en lugar de los semirayos, si constantemente se añade «respecto del rayo límite k», y así se obtienen para los rayos de un haz las mismas relaciones, exactamente, que en los teoremas *a)* á *l)* del § **1** fueron enunciadas para los puntos de una línea cerrada. Conformémonos con indicar los que corresponden á los teoremas 19.° á 23.° del § **1**.

Si las rectas e, f, g *y* k *pertenecen á un haz, las* f *y* g *estarán separadas por las* e *y* k, *ó las* g *y* e *por las* f *y* k, *ó las* e *y* f *por las* g *y* k; *y cada una de estas posiciones excluye las otras dos.*

Si e, f *y* k *son rayos de un haz, se puede escoger otro rayo* g *en él, de tal modo que los* e *y* f *estén separados por los* g *y* k.

Si, en un haz, los rayos e *y* f *están separados por los de uno de los pares* gk *y* hk, *y no por los del otro, los* e *y* f *estarán separados por los* g *y* h. *En los demás casos, los* e *y* f *no están separados por los* g *y* h.

Si, en un haz, los rayos e *y* f *están separados por los* g *y* k, *también los* g *y* k *lo están por los* e *y* f.

§ 4.—Del haz de planos

21. Si, fuera de un plano P, consideramos dos puntos A y B, podrán presentarse dos casos: que el plano P corte á la recta AB entre A y B, ó que no. En el primer caso, se dice que el plano P pasa entre A y B ó, también, que estos puntos están á distintos lados de aquel plano, y en el segundo, se dice que los dos puntos están al mismo lado del plano. Si, además de los puntos A y B, se considera un tercero C, también fuera del plano P, se verifican los tres siguientes teoremas:

Si los puntos A *y* B *están al mismo lado del plano* P *y los* A *y* C *á distintos lados, los* B *y* C *estarán á distintos lados.* Pues si A, B y C están en una recta r, el plano P la corta entre A y C, pero no entre A y B, según la hipótesis; por consiguiente, pasa entre B y C (*). Si, por el contrario, A, B y C son puntos que determinan un plano ABC, este plano y el P tendrán un punto común situado en la recta AC, entre A y C, luego se cortan en una recta m, la cual, por pasar entre A y C, pero no entre A y B, según la hipótesis, pasa entre B y C.

De aquí se deduce inmediatamente que *si, tanto* A *y* B *como* A *y* C, *son puntos situados al mismo lado del plano* P, *los* B *y* C *están también del mismo lado.*

(*) Para convencerse de ello basta aplicar el teorema 10.° del artículo 2.°—*(N. T.)*

Si, tanto A *y* B *como* A *y* C, *son puntos situados á distintos lados del plano* P, *los* B *y* C *están del mismo lado.* En efecto, si A, B y C son puntos de una recta r, el plano P la cortará entre A y B al mismo tiempo que entre A y C, por consiguiente, no entre A y C. Si, por el contrario, los puntos A, B y C determinan un plano, éste tendrá comunes con el P un punto de la recta AB, situado entre A y B, y un punto de la recta AC situado entre A y C, por consiguiente, una recta que pasa entre A y B y entre A y C, luego no entre B y C (*).

Si se representa por r una recta y por A un punto exterior á ella, y se toma en el plano Ar un punto A' situado del mismo lado de la recta r que el punto A, se dice que el punto A' está en el semiplano rA; al punto A se le llama también «punto del semiplano rA», y para designar el semiplano puede tomarse cualquiera de sus puntos en sustitución del A. Si la recta r está en el plano P, todos los puntos del semiplano rA están del mismo lado de P.

22. Todos los planos que pasan por un punto V forman una figura que se llama radiación de planos; el punto V recibe el nombre de vértice ó centro de la radiación. Si P, Q, R y S son planos que pasan por el punto V, se dice que el plano S pertenece á la radiación PQR, si los planos P, Q y R tienen un solo punto común; de estos mismos planos se dice que son planos de la radiación PQR. Para designar una radiación se pueden tomar tres cualesquiera de sus planos que tengan un solo punto común, ó, también, hacer uso, simplemente, de una sola letra, la que sirva para designar el vértice.

Los planos que tienen común una recta r (esto es, los que tienen común más de un punto) forman una figura que se llama haz de planos; la recta r recibe el nombre de arista del haz. Si P, Q y R son planos que pasan por la recta r, se dice que el plano R está en el haz PQ, en el haz r, etc.

Si P, Q y R son planos de un haz r; rA y rB semiplanos de P y Q, respectivamente, situados á distintos lados del plano R, y, por último, rC el semiplano de R que contiene el punto de intersección del segmento AB con el plano R, se dice que el semiplano rC está *entre* los rA y rB.

Los semiplanos A, B y C de los planos del haz, pueden ser

(*) Aplíquese el teorema 10.° del § **2**.—*(N. T.)*

considerados del mismo modo que los semirrayos que en un haz de rectas parten del vértice. Si *A*, *B* y *C* son puntos arbitrarios no es necesario que de los tres semirayos *rA*, *rB* y *rC* uno de ellos esté entre los otros dos; hecha abstracción de esto, aquí se verifican las mismas relaciones que para los puntos de una recta. Para evitar esta excepción es necesario y suficiente considerar tan sólo semiplanos que estén al mismo lado de un plano que pase por *r*. Sean *P*, *Q*, *R* y *T* planos del haz *r*; *rA* *rB* y *rC* los semiplanos de *P*, *Q* y *R*, respectivamente, situados al mismo lado de *T*, y *rA'*, *rB'* y *rC'* los opuestos. Si suponemos que el *rC* está entre los *rA* y *rB*, también el *rC'* estará entre los *rA'* y *rB'*; podemos, pues, decir que el plano *R* está entre los *P* y *Q* (ó *Q* y *P*) por exclusión del *T*, ó respecto del plano límite *T*, y vemos que también el *T* está entre los *P* y *Q* respecto del plano límite *R*. Esto se expresa diciendo que los planos *P* y *Q* están separados por los *R* y *T* (ó *T* y *R*), con lo cual pueden establecerse las siguientes proposiciones:

Si P, Q, R *y* T *son planos de un haz, el par* QR *está separado por el* PT, *ó lo está el* RP *por el* QT, *ó lo está el* PQ *por el* RT; *y cada una de estas posiciones excluye las otras dos.*

Si P, Q *y* T *son planos de un haz, se puede escoger otro plano* R *de él, tal que el par* PQ *esté separado por el* RT.

Si, en un haz de planos, un par de rayos PQ *está separado por uno de los pares* RT, ST, *pero no por el otro, el par* PQ *estará separado por el* RS. *En los demás casos, el par* PQ *no está separado por el* RS.

Si, en un haz de planos, el par de rayos PQ *está separado por el* RT, *también éste lo está por aquél.*

23. Las propiedades de los haces de rectas y las de los haces de planos están íntimamente relacionadas entre sí.

Sean *e* y *f* rectas del plano *U* que pasan por el punto *M*; *P* y *Q* planos (distintos del *U*) que pasan, respectivamente, por *e* y *f* y, por último, *r* la recta de intersección de los planos *P* y *Q*. Se pueden relacionar el haz de rectas *ef* y el haz de planos *PQ*, haciendo corresponder á cada rayo del primero el plano que lo contiene en el segundo, con lo cual, las propiedades de los rayos del primer haz conducen á propiedades de los del segundo, y recíprocamente. Si se escoge en el rayo *e* un punto arbitrario *A*, todos los puntos de la semirecta *MA* están

contenidos en el semiplano rA del plano correspondiente P; se puede, pues, hacer corresponder al semirayo MA de la recta e el rA del plano P. Si la semirecta MC del plano U está entre las MA y MB, también el semiplano rC está entre los rA y rB, y recíprocamente. Designemos por g la recta MC y por R el plano rC y tomemos en el haz ef un cuarto rayo k, y en el haz PQ el plano T que le corresponde; en tal hipótesis, si las semirectas MA, MB y MC están del mismo lado de k, también los semiplanos rA, rB y rC están del mismo lado de T, y recíprocamente.

Si las semirectas MA, MB y MC están del mismo lado de k y, además, la MC entre las MA y MB ó, lo que es lo mismo, *si los rayos* e *y* f *están separados por los* g *y* k, *los planos* P *y* Q *también lo están por los* R *y* T. El recíproco es cierto.

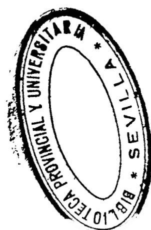
§ 5.—De la radiación de rectas

24. Dos rectas l y m de un plano determinan, siempre que se cortan, una radiación de rectas lm. Si, fuera del plano lm, se toma un punto N, la recta que lo une con el vértice de la radiación lm, esto es, el rayo de esta radiación que pasa por aquel punto, puede ser obtenido sin hacer uso del vértice; basta, para ello, considerar los planos Nl y Nm, los cuales tienen común una recta n, que es el rayo buscado. Esta construcción continúa siendo aplicable cualesquiera que sean las posiciones de las rectas l y m en el plano, ya sea ó no conocida la existencia de un punto común á ambas.

Si, ahora, se toma un punto P fuera de los planos lm, Nl y Nm, y se designa por p la recta de intersección de los planos Pl y Pm, los planos nP y pN están determinados; si l y m se cortan en V, estos dos planos se confunden en el NPV, es decir, las rectas n y p están en un plano; pero se puede hacer ver que, aunque no pueda probarse que las rectas l y m se cortan, las n y p están en un plano.

Desde luego, las rectas l y m están en un plano. Sobre la recta l tomamos dos puntos cualesquiera A y B, y suponemos que la recta m no encuentra al segmento AB; si en el plano lm se escoge un punto C, exterior á las rectas l y m, que no esté del mismo lado de la m que los puntos A y B, la recta m cortará á la AC en un punto, como el D, situado entre los A

y C, y á la AC en un punto, como el E, situado entre los B y C. Ahora bien, los puntos C y D están al mismo lado de la recta AE y los B y C á distintos lados, luego los B y D están á distintos lados, y las rectas AE y BD se encuentran en un



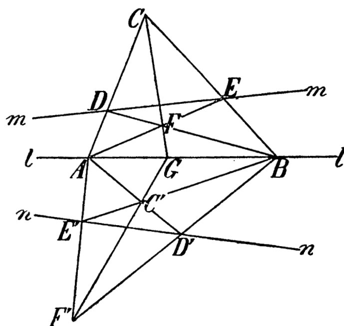


Fig. 12.

punto F comprendido entre los A y E y, también, entre los B y D. Del mismo modo, por estar los puntos A y D al mismo lado de la recta CF y los B y D á distintos lados, los A y B están á distintos lados, y las rectas l y CF se encuentran en un punto G.

Las rectas l y n también deben estar, según lo dicho, en un plano, pero sin que las l, m y n pertenezcan al mismo. Supongamos que tampoco la recta n encuentra al segmento AB, y tomemos en el plano ln un punto F', exterior á las rectas l y n, situado á diferente lado de la n que los A y B. Designando por E' el punto de intersección de n con AF', por D' el de n con BF' y por C' el de AD' con BE', se ve que E' está entre A y F', D' entre B y C', y C' entre A y D' y, también, entre B y E' (*). Las rectas CC', DD', EE' y FF', que llamaremos c, d, e y f, son tales que no hay tres de ellas en un plano, pero

(*) La existencia de los puntos E', D' y C', así como sus posiciones respectivas en las rectas AF', BF' y AD' y BE' se establece de modo análogo á lo hecho antes para los puntos E, D y F.—*(N. T.)*

las de cada uno de los pares cd, ce, df y ef sí lo están, y además se cortan; pues, fijándose en las c y d, por ejemplo, los puntos A y D' están á distintos lados de c, y los A y D al mismo lado, luego los D y D' están á distintos lados y la recta DD' ó d encuentra á la c. Ahora, *si las rectas* m *y* n *pertenecen á un plano, las* CF *y* C'F' *pasan por un punto, el* G. Pues, en tal caso, en el plano mn estarán las rectas d y e, pero no las c y f, luego el punto cd es el mismo ce, y el df el mismo ef (*), y existe un punto de por el cual pasan c y f, y, por consiguiente, existe también un plano cf que contiene los puntos C, F, C' y F', de donde se sigue que el punto G, que está en los planos lC' y CFC', está también en su intersección $C'F'$. Recíprocamente, *si las rectas* CF *y* C'F' *se cortan, las* m *y* n *están en un plano*. Pues, entonces, los puntos C, F, C' y F', ó, lo que es lo mismo, las rectas c y f están en un plano, y como las rectas d y e no pertenecen á él, el punto cd se confunde con el df y el ce con el ef en un punto cf ó de, y los puntos D, E, D' y E' están en un plano.

Ahora podemos ya demostrar el siguiente teorema: *Si las rectas de cada uno de los pares* lm, ln, mn, lp *y* mp *están en un plano, pero sin que el* lm *contenga alguna de las rectas* n *ó* p, *también éstas pertenecen á un plano*. Conservemos las notaciones anteriores. Si una de las rectas m, n ó p encuentra al segmento AB, las l, m, n y p tienen un punto común, luego las n y p están en un plano; debemos, pues, examinar únicamente el caso en que ninguna de aquellas rectas m, n y p encuentre á este segmento AB. Tomemos, entonces, en el plano lp el punto F'', exterior á las rectas l y p, que no esté al mismo lado de la p que los puntos A y B, y hallemos el punto E'' intersección de p con AF'', el D'' intersección de p con BF'' y el C'' intersección de AD'' con BE''. Puesto que, por hipótesis, las rectas m y n están en un plano, las CF y $C'F'$ pasan por G; como, asimismo, se ha supuesto que las rectas m y p están en un plano, también las CF y $C''F''$ pasan por G. Resulta, pues, de aquí, que las rectas $C'F'$ y $C''F''$ se cortan, luego existe un plano np.

(*) Pues tanto el cd como el ce no son otro que el de intersección de c con el plano mn, y el df y el ef son el de intersección de este plano con f.—(*N. T.*)

Este teorema muestra la ventaja de ampliar el concepto de radiación de rectas. Si las rectas *e*, *f* y *g* son tales que de dos en dos están en un plano, sin que las tres estén en el mismo, ó si, estando las tres en el mismo, cada una de ellas está en un plano con una recta exterior al de las tres, se dice, como si se tratase de intersecciones, que *g* está en la radiación *ef*, que *g* es un rayo de la radiación *ef*, etc., y á las mismas rectas *e* y *f* se les llama «rayos de la radiación *ef*». Cuando *e* y *f* se cortan, la recta *g* pasa por el punto *ef* y es un rayo de la radiación *ef* en el sentido «propio» hasta aquí usado, ó, dicho más brevemente, es un rayo de la radiación propia *ef*, la cual necesariamente tiene un vértice.

25. *Si las rectas* g *y* h *pertenecen á la radiación* ef, *están en un plano.*—Demostración. En la hipótesis hecha, que equivale á suponer la existencia de los planos *ef*, *eg*, *fg*, *eh* y *fh*, el caso en que tanto las rectas *e*, *f* y *g*, como las *e*, *f* y *h*, están en un plano, es evidente por sí mismo, y el contrario, esto es, cuando ni aquéllas ni éstas lo están, se demuestra en seguida mediante el último teorema. Admitamos, pues, que las rectas *e*, *f* y *g*, por ejemplo, estén en un plano, pero que no lo estén las *e*, *f* y *h*; cada una de las *e*, *f* y *g* está en un plano con un cierto rayo *k* exterior al plano de las tres; además, según el último teorema, existe el plano *hk* que no contiene una, al menos, de las rectas *e* y *f*, por ejemplo, la *e*, luego los rayos *g* y *h* están en la radiación *ek* sin estar ninguno en el plano *ek*, y puede aplicarse nuevamente el teorema antes enunciado.

Si las rectas g *y* h *pertenecen á la radiación* ef, *también las* e *y* f *pertenecen á la* gh.—En efecto, las rectas *e*, *f*, *g* y *h* están de dos en dos en un plano. Si el plano *ef* no pasa por *g* ni por *h*, la recta *e* estará fuera del plano *gh* ó en él, pero en este caso *f* está fuera, y en uno y en otro *e* es rayo de la radiación *gh*, y lo mismo le ocurre á *f*. Si *e*, *f* y *g* están en un plano, pero no lo están *e*, *f* y *h*, tampoco lo están *f*, *g* y *h*, es decir, *e* pertenece á la radiación *gh*, y lo mismo ocurre á *f*. Por último, si *e*, *f*, *g* y *h* están en un plano, una cierta recta *k*, tomada fuera del plano *ef*, está en un plano con cada una de las *e*, *f* y *g*, y por pertenecer *k* á la radiación *ef*, también está en un plano con *h*, con lo cual se ve otra vez que *e* y *f* son rayos de la radiación *gh*.

Si e′ *es un rayo de la radiación* ef *distinto del* f, *la radia-*

ción ef *y la* e′f *se confunden.*—En efecto, si *g* es un rayo de la radiación *ef*, ó es distinto del *e′*, ó coincide con él; en el primer caso, *f* está en la radiación *ge′*; por consiguiente, *g* en la *e′f*; en el segundo, *g* es asimismo considerado como rayo de la radiación *e′f*. Cada rayo de la radiación *ef* pertenece, pues, á la *e′f*. Del mismo modo, recíprocamente, cada rayo de la radiación *e′f* pertenece á la *ef*, puesto que *e* es un rayo de la radiación *e′f* distinto del *f*.

Si e′ *y* f′ *son dos rayos cualesquiera de la radiación* ef, *las dos radiaciones* ef *y* e′f′ *son idénticas.*—Pues por ser el rayo *e′* distinto de uno, al menos, de los *e* y *f*, las radiaciones *ef* y *e′f* se confunden, y, por razón análoga, también se confunden los *e′f* y *e′f′*.

Según esto, al nombrar la radiación *ef* pueden ser substituídos sus rayos *e* y *f* por otros dos cualesquiera de la misma. Para designar una radiación emplearemos á veces una sola letra; si la radiación tiene vértice (radiación propia), la misma letra sirve para nombrar la radiación y el vértice, de modo que cada notación de aquélla lo es también de éste. *Dadas dos rectas* e *y* f *en un plano, hay siempre una radiación, á la cual pertenecen.* Esta radiación se puede designar por *ef*. *Toda radiación está determinada por dos cualesquiera de sus rayos.*—Un conjunto de rayos aislados de una radiación, recibe también el nombre de radiación. Tales rayos están de dos en dos en un plano, pero la propiedad recíproca sólo puede asegurarse que es cierta cuando los rayos no están todos en un plano. Si todos los rayos considerados están en un plano, es preciso que fuera de él haya una recta que esté en un plano con cada uno de aquéllos. Según esto, las rectas que de dos en dos están en un plano, sin pertenecer á una radiación, están siempre en un plano.

El conjunto de los rayos de una radiación que están en un plano, recibe el nombre de haz de rectas y, en particular, de haz de rectas propio cuando tienen un punto común. Si *e*, *f* y *g* son rayos de un haz, se dice que *g* está en el haz *ef*, etcétera. Para designar el haz en este sentido, puede hacerse uso de dos cualesquiera de sus rayos, ó, también, de una sola letra, la empleada para nombrar la radiación, si el plano es conocido.

26. Consideremos ahora dos radiaciones distintas *U* y *V*.

Puede ocurrir que las dos radiaciones contengan un rayo r, pues dada una recta r se puede construir diferentes radiaciones, á las cuales pertenezca; pero ningún otro rayo s de la radiación U puede serlo de la V. El rayo r queda determinado sin ambigüedad al decir que pertenece á las radiaciones U y V; podremos, pues, según esto, designarlo por UV ó VU, ya representen U y V puntos ó no. Para, en lo posible, emplear los mismos modos de expresión que cuando U y V son puntos, diremos que V es una radiación de la recta r, que la radiación V pertenece á la recta r, etc. Entonces *toda recta está determinada por dos cualesquiera de sus radiaciones.* Pero, ¿se podrá hallar siempre una recta que pertenezca á dos radiaciones? Podemos ya ahora responder afirmativamente cuando una de las radiaciones, la V, por ejemplo, tiene un vértice conocido; en este caso, si se toman dos rayos l y m de la radiación U, que no estén en un plano con el punto V, el rayo UV se obtiene como intersección de los planos lV y mV. *Una radiación cualquiera y una radiación propia tienen,* pues, *siempre una recta común.* Pero si ninguna de las dos radiaciones tiene vértice conocido, no podemos aún asegurar nada.

27. Pasemos ahora á considerar tres radiaciones T, U y V, limitándonos, desde luego, al caso en que una, al menos, la U, por ejemplo, tenga vértice conocido. Los rayos TU y VU que, en tal caso, existen siempre y están completamente determinados, tienen un punto común, y por ellos se puede hacer pasar un plano. Para que este plano no quede indeterminado, necesitamos suponer que los rayos TU y VU son diferentes uno de otro, es decir, que T, U y V no son radiaciones de una recta. Designemos por e y f los rayos TU y VU y por P el plano ef. Este plano P pasa por el vértice de la radiación U; si, pues, se une un punto cualquiera A del plano P con el punto U, el rayo AU está en el plano P. Una relación análoga existe entre el plano P y la radiación V; pasa por un rayo e de la radiación, y si se toma en el plano P un punto cualquiera B (no situado en e) y se designa por g el rayo BV, existe un plano eg que se confunde con el eB, es decir, g es una recta de P; el rayo BV correspondiente á cualquier punto B (que no sea vértice de la radiación V) del plano P está, pues, contenido por entero en este plano.

Siempre que el plano P contenga un rayo de la radia-

ción *V*, diremos que *V* es una radiación del plano *P*. Entonces, la observación que acabamos de hacer se expresa así: Si *B* es un punto y *V* una radiación del plano *P*, la recta *B V* está contenida en este plano. Y de la definición se deduce que: si *r* es una recta del plano *P*, toda radiación de *r* lo es también de *P*.

Según esto, las radiaciones *T*, *U* y *V* son radiaciones del plano *P* que pasa por los rayos *e* y *f*, y se podrá decir que *dos radiaciones cualesquiera y una propia pertenecen siempre á un plano*. Este plano debe contener (usando la anotación anterior) los rayos *TU* y *VU*, los cuales son diferentes uno de otro si las radiaciones *T*, *U* y *V* no pertenecen á una recta. Resulta, pues, que *un plano está determinado cuando se conocen tres de sus radiaciones, de las cuales dos pueden ser cualesquiera y una ha de ser propia, y las tres no pertenecen á una recta.* Si *T*, *U* y *V* son estas radiaciones, el plano se designa por *TUV*. Si no se sabe que alguna de las tres radiaciones tenga vértice, no podremos, por ahora, asegurar que sean radiaciones de un plano.

28. De lo dicho hasta aquí resulta que una recta que tiene un punto y una radiación comunes con un plano, está contenida por completo en él. Este teorema puede generalizarse diciendo que *toda recta* r *que tiene dos radiaciones* U *y* V *comunes con un plano* P, *pertenece á él*. Para demostrarlo, tomemos en el plano *P* el punto *A* arbitrario (exterior á la recta *r*); el rayo *A V* será distinto del *r* y, por ser ambos de la radiación *V*, determina con él un plano, al cual pertenecen las radiaciones *A*, *U* y *V*, esto es, el plano *A U V*, que es el mismo *P*; luego la recta *r* es una recta de *P*.

Por una radiación V *y una recta* r *se puede siempre hacer pasar un plano*. Pues si *A* y *B* son puntos de *r*, las radiaciones *A*, *B* y *V* pertenecen á un plano.

Un plano está determinado cuando se conocen una de sus rectas r *y una de sus radiaciones* V, *que no pertenezca á la recta* r. Pues, conservando la notación anterior, *A*, *B* y *V* son radiaciones del plano.

Por dos rectas que tienen una radiación común, se puede siempre hacer pasar un plano.

Si agregamos á estas propiedades que: *Todo plano está determinado por dos cualesquiera de sus rectas*, y *dos planos que*

tienen una radiación propia común, tienen común una recta, todas las relaciones entre puntos, rectas y planos contenidas en los teoremas 4.° y 5.° del § **1** y en los 2.° á 9.° del § **2** se han transformado en relaciones entre radiaciones, rectas y planos. Se ve que no siempre pueden ser substituídos los puntos por radiaciones cualesquiera; al dar un punto se tiene, no sólo una radiación, sino también un vértice en ella, por lo cual en ciertos casos la radiación propia es más á propósito para tal substitución. No ocurre lo mismo cuando es preciso averiguar la existencia de puntos. Pues si se trata, no de un punto, sino de una radiación, y se quiere prescindir de fijar el vértice, hay casos en que pueden resolverse cuestiones á las que no sería dado contestar si las radiaciones hubiesen de ser propias. He aquí algunos ejemplos:

De dos rectas de un plano ó de una recta y un plano no podíamos afirmar que siempre se cortasen en un punto. Pero *dos rectas de un plano tienen siempre una radiación común,* y *una recta* r *tiene siempre una radiación común con un plano* P, pues si A es un punto del plano P, exterior á la recta r, por él pasa una recta s que pertenece á los planos rA y P, luego r y s son rayos de una radiación situada en r y P.

No podíamos afirmar tampoco que dos planos tienen siempre puntos comunes ó que tres planos pasan siempre por un punto, aunque se corten de dos en dos. Pero *dos planos* P y Q *siempre tienen radiaciones comunes,* pues si r es una recta de Q hay siempre una radiación que pertenece á r y á P, por consiguiente, á P y Q. Pero claro es que, en tanto no se conozca alguna radiación propia, no se podrá asegurar que los planos tengan una recta común y, por tanto, que las radiaciones comunes estén en una recta. Y *tres planos* P, Q y R *tienen una radiación común siempre que dos de ellos,* Q y R, *se corten,* pues el plano P tiene común con la recta QR una radiación, y todas las radiaciones de la recta QR lo son de Q y de R.

29. En el intento realizado para introducir las radiaciones en lugar de puntos, no se ha tratado para nada de los teoremas de los dos primeros artículos, no mencionados antes. En éstos aparece un concepto relativo á tres puntos de una recta que no puede ser aplicado á radiaciones cualesquiera de una recta, á saber, que de tres de tales puntos siempre está uno «entre los otros dos». Para el caso de tres radiaciones

propias podríamos servirnos de la misma expresión, pero tendríamos, desde luego, que limitarnos á tal caso. Según esto, la generalización de que se trata no debe extenderse á los teoremas para cuya enunciación sea preciso aquel concepto ó algún otro de él derivado. Por el contrario, podremos admitirla desde ahora para todos los demás teoremas, á los que aún hemos agregado algunos otros nuevos.

Adición al § 5.

Tomemos en una radiación propia V seis rectas a, b, c, a', b' y c', tales que sólo puedan estar en un plano tres de ellas cuando pertenezcan á uno de los grupos

$$bca',\ cab',\ abc',\ b'c'a,\ c'a'b \text{ y } a'b'c.$$

Las seis rectas son, entonces, diferentes unas de otras; lo mismo ocurre á los tres planos aa', bb' y cc', y en ninguna de las seis rectas se cortan dos de estos planos. También los seis planos bc, ca, ab, $b'c'$, $c'a'$ y $a'b'$ son diferentes entre sí y de los aa', bb' y cc'; los designaremos por A, B, C, A', B' y C', respectivamente. Los planos A y B pasan por la recta c, que no pertenece al C ni al A'; luego ni los A, B y C, ni los A, B y A' pasan por una recta. Aplicando consideraciones análogas á cada tres de estos seis planos, vemos que sólo pueden pasar tres de ellos por una recta, si son los de uno de los grupos

$$BCA',\ CAB',\ ABC',\ B'C'A,\ C'A'B \text{ y } A'B'C'.$$

Finalmente, las tres rectas AA', BB' y CC' son diferentes unas de otras y de las a, b, c, a', b' y c', y en ninguno de los seis planos hay dos de estas rectas.

Los planos aa', bb' y cc' pueden cortarse en una recta, y las rectas AA', BB' y CC' pueden estar en un plano.

La recta AA' no está en el plano bb', pues, en caso contrario, estaría en los planos bc y bb' y éstos tendrían más de una recta común. Por consiguiente, si los planos aa', bb' y cc' se cortan en una recta, ésta es diferente, no sólo de las a, b, c, a', b' y c', sino también de las AA', BB' y CC'. Si las tres rec-

tas AA', BB' y CC' están en un plano, éste es diferente de los A, B, C, A', B' y C', así como de los aa', bb' y cc'.

D. Ventura Reyes y Prósper ha dado en *Mathematische Annalen,* 1880, tomo XXXII, pág. 157, una ingeniosa demostración del siguiente teorema:

Si los planos aa', bb' *y* cc' *pasan por una recta* e, *las rectas* AA', BB' *y* CC' *están en un plano.*

Para demostrarlo se toman en a y a' puntos A_1 y A'_1 á distintos lados de e, con lo cual esta recta corta á la $A_1A'_1$, que no pasa por V, en un punto O, entre A_1 y A'_1; después, en b' se toma un punto B'_1 no situado al mismo lado de b que O, con lo cual la recta b corta á la OB_1', que no pasa por V, en un punto B_1, entre O y B'_1, y los puntos O, A_1, A'_1, B_1 y B'_1 están en un plano E; por último, en c se toma un punto C_1 no situado en E, ni del mismo lado de c' que O, con lo cual la recta c' corta á la OC_1, que no pasa por V, en un punto C'_1, entre O y C_1, y las rectas $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ y $C_1C'_1$, que pasan por O, no están en un plano. En el plano OB_1C_1, los puntos O y C_1 están á distintos lados de la recta $B'_1C'_1$ y los O y B_1 al mismo lado, luego los B_1 y C_1 están á distintos lados; en el plano OC_1A_1, los puntos O y C_1 están á distintos lados de la recta $C'_1A'_1$ y los O y A_1 al mismo lado, luego los C_1 y A_1 están á distintos lados: en el plano OA_1B_1, los puntos O y B'_1 están á distintos lados de la recta A_1B_1 y los O y A'_1 al mismo lado, luego los A'_1 y B'_1 están á distintos lados. Por consiguiente, las rectas B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 son cortadas por las $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$ y $A'_1B'_1$ en puntos como $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ que están al mismo tiempo en el plano $A_1B_1C_1$ y en el $A'_1B'_1C'_1$, luego pertenecen á una recta, de donde resulta que las rectas $V\mathfrak{A}$, $V\mathfrak{B}$ y $V\mathfrak{C}$ de intersección de los planos bc y $b'c'$, ca y $c'a'$ y ab y $a'b'$ están contenidas en el plano determinado por el punto V y la recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

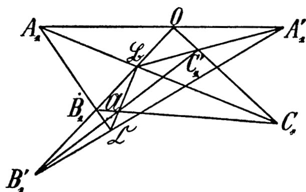


Fig. 13.

§ 6. — Generalización del concepto de «punto»

30. Desde el punto de vista en que nos hemos colocado ahora, podríamos prescindir por completo de la palabra «punto» y, en su lugar, hablar sólo de radiaciones (propias ó no propias). Podríamos entonces reunir en un corto número de proporciones la serie de relaciones, á las que hemos llegado gradualmente. Pero, si bien, con tal cambio, la exposición ganaría en brevedad, perdería al mismo tiempo en claridad, porque la palabra «radiación» sugiere representaciones más complicadas de lo necesario y conveniente para la comprensión de los desarrollos geométricos.

Se evita este inconveniente, si, en vez de abandonar el uso de la palabra punto, se amplía su significado, del mismo modo que se hizo con la palabra «radiación». Convendremos, pues, en no usar la palabra «punto» con la significación que hasta aquí tenía, sino que, en adelante, serán equivalentes las locuciones «la radiación V pertenece á la recta r» y «el punto V está en la recta r»; y en que, donde se llame propia á la radiación V, deberá también llamarse propio al punto V (*). La expresión «punto propio», significará,

(*) Véase Staudt: *Geometrie der Lage,* 1847, § **5**, donde, sin embargo, se consideran como impropios únicamente los llamados puntos del infinito de la Geometría euclidiana. F. Klein ha sido el primero en introducir, con un sentido más amplio, los puntos impropios ó ideales: *Mathematische Annalen*, 1871, tomo IV, pág. 624; 1873, tomo VI, páginas 131 y 141.

pues, desde ahora, exactamente lo mismo que hasta aquí se entendía al decir simplemente punto, con lo cual, sin necesidad de convenios circunstanciados, puede ya aplicarse, de un modo más general, la palabra «punto».

Si el punto V está situado en una recta del plano P, se dice: el punto V está en el plano P. Esto tiene, pues, igual significado que decir: la radiación V pertenece al plano P.

Este hecho se repite en la Matemática en muchas ocasiones análogas. Así, después de las sucesivas generalizaciones del concepto inherente á la palabra «número», se hace necesario emplear la expresión «número real, entero y positivo» donde, al principio, bastaba la palabra «número» sin calificativo alguno; la función á que primeramente se refería la palabra «potencia», debe llamarse más tarde «potencia con exponente real, entero y positivo», etc. Más breve sería hablar de números «propios» y potencias «propias», etc. Pero, así como únicamente de números reales se dice que los unos son «mayores» que los otros, en la línea recta sólo cuando se trate de tres puntos propios puede decirse que uno está «entre los otros dos». Este concepto y, por ahora, todos los definidos con su intervención quedan, por consiguiente, limitados en su aplicación á los puntos propios. Para los demás, todas las definiciones y denominaciones que hemos dado hasta aquí conservan su validez. Se dice, pues, que las rectas g y h se cortan cuando existe un punto y sólo uno situado en las dos, sin que sea necesario que tal punto común sea propio; se llama radiación de planos al conjunto de planos que tienen común un punto cualquiera, el cual recibe el nombre de vértice de la radiación, etc.

En lugar de los teoremas 4.° y 5.° del § **1** y 2.° y 9.° del § **2**, aparecen ahora los siguientes:

1.° *Por un punto cualquiera y un punto propio se puede siempre trazar una recta.*

2.° *Toda recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos.*

3.° *Por dos puntos cualesquiera y uno propio se puede siempre hacer pasar un plano.*

4.° *Todo plano está determinado si se dan dos puntos cualesquiera y uno propio del mismo, y estos tres puntos no están en línea recta.*

5.° *Una recta que tiene dos puntos comunes con un plano, está situada por entero en él.*

6.° *Por una recta y un punto se puede trazar siempre un plano.*

7.° *Un plano queda determinado cuando de él se conocen una recta y un punto fuera de ella.*

8.° *Por dos rectas que tienen un punto común se puede trazar siempre un plano.*

9.° *Todo plano está determinado por dos cualesquiera de sus rectas.*

10.° *Si dos planos tienen común un punto propio, tienen común una recta.*

11.° *Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común.*

12.° *Una recta y un plano tienen siempre un punto común.*

13.° *Dos planos tienen siempre puntos comunes.*

14.° *Tres planos, dos de los cuales se cortan en una recta, tienen siempre un punto común.*

31. Un grupo cualquiera de puntos, rectas y planos recibe el nombre de figura, pudiendo ser los puntos, no sólo propios, sino cualesquiera. Toda figura puede ser ampliada, ya introduciendo á capricho nuevos puntos, rectas y planos, ó deduciendo de la figura (construyendo) nuevos puntos como intersección de sus rectas y planos, y nuevas rectas y planos por unión de sus puntos y rectas. Pero siempre el campo de la construcción es uno limitado, en el cual se hallan superficies planas, segmentos rectilíneos y puntos propios, dados en parte, y en parte deducidos según cualquiera ley, utilizando las porciones conocidas. Cuando en el curso de la construcción un punto E viene definido por la intersección de dos rectas l y m, á las cuales pertenecen dos segmentos contenidos en aquel campo, no es preciso que exista tal punto de intersección dentro del campo, y si no se halla en él, para proseguir la construcción se hace uso, en su lugar, de las rectas l y m que lo representan. Se debe, no obstante, observar, que la posibilidad de unir dos puntos por una recta, ó tres puntos por un plano, sólo está asegurada cuando uno de ellos, al menos, es punto propio.

La naturaleza de un punto obtenido por medio de la construcción, esto es, que el punto resulte propio ó no, depende de la figura dada. Hasta ahora disponemos de un solo medio para

averiguarlo, que es el teorema 10.° del § **2**, el cual se enunció, además, de diferentes modos en los artículos tercero y cuarto.

32. Las figuras en las que, hasta aquí, podíamos seguir la deducción de los teoremas constan de puntos propios, segmentos rectilíneos y superficies planas, que representan á los puntos, rectas y planos de que se trata. Así, cuando se habla de tres puntos propios A, B y C que están en línea recta, se toma en la figura un segmento al que pertenecen A, B y C; si el punto C debe estar entre los otros dos, se le coloca, al efecto, en dicha posición, etc., etc. Generalmente, en el curso de la demostración es necesaria una ampliación de la figura. Si, por ejemplo, se trata primero de una recta r y dos puntos propios D y E en un plano con la recta r, pero á distintos lados de ella, y más adelante se consideran también la recta DE y su punto de intersección F con la recta r, se traza en la figura un segmento de la recta DE y el punto propio F. Así, toda hipótesis hecha en el teorema correspondiente, ó toda construcción exigida por la demostración, quedan fijadas en forma más expresiva y se facilita el examen de todas las relaciones, las cuales se recuerdan más rápidamente con sólo una ojeada á la figura, y estimulan la inventiva con más intensidad que por cualquier otro medio.

33 El proceso de estas consideraciones nos lleva ahora á aclarar, por medio de figuras, los teoremas en que intervienen puntos cualesquiera. Cada uno de éstos puede tomarse en la figura como punto propio, ó venir dado, simplemente, por dos de sus rectas. Según esto, se pueden considerar dos casos en la representación de cada uno de dichos puntos, y el número de casos aumentará muy rápidamente con el número de puntos. Mas no siempre es necesario tomar en consideración todos los casos diferentes. Cuando en la demostración misma se distinguen varios casos, entonces se puede aclarar cada uno con una figura especial. Por el contrario, si la demostración tiene un carácter general, una sola figura, que represente cualquiera de los casos, llena completamente su objeto. Pues, en general, la intervención de la figura no es necesaria; lo que realmente hace es facilitar la comprensión de las relaciones enunciadas en el teorema y de las construcciones acaso necesarias para la demostración, y, además, es

un fecundo medio para descubrir tales relaciones y construcciones. (*) Pero si no se teme el sacrificio de tiempo y trabajo, se puede prescindir de las figuras en la demostración de los teoremas; más aún, el teorema sólo está realmente demostrado cuando la demostración es completamente independiente de la figura.

Los axiomas no se pueden concebir sin la figura correspondiente; son la expresión de lo que se ha observado en ciertas figuras muy sencillas. Los teoremas no se fundan en la observación, sino que son demostrados; toda conclusión que aparece en el curso de la demostración debe confirmarse en la figura, pero no es con ella como se justifica, sino con una proposición cierta (ó definición) que le precede. Siempre hemos enunciado con precisión estas primeras proposiciones, y aún en los casos en que, por abreviar, no se haya hecho así, podíamos referirnos á una proposición cierta. A poco que se separe de este procedimiento, pierde ya toda precisión el espíritu de la demostración.

En la obra de Euclides vemos aparentemente realizada una separación exacta entre los axiomas y teoremas. En el primer libro de los Elementos se colocan en primer término 35 definiciones, las cuales deben representar, para dicho libro, lo que pudiéramos llamar índice de los conceptos fundamentales y derivados, pero sin un límite de separación bien definido. A continuación se enuncian 3 postulados y 12 axiomas: estas 15 proposiciones se pueden considerar como axiomas. A ellas hace seguir Euclides los teoremas, en la creencia—así debemos pensarlo—que, con lo ya puesto, tiene preparado todo lo necesario para poder demostrar las proposiciones del primer libro. Pero ya la primera demostración

---

(*) Gino Loria, en una comunicación dirigida á *Il Bolletino de Matematica* (año V, núm. 10-12) el 4 de Diciembre de 1906, cita los dos siguientes casos de descubrimiento por construcción geométrica: 1.° *Ivon-Villarceau*, siendo estudiante de la Escuela Central de París, al dibujar una lámina de Geometría descriptiva, descubrió las secciones circulares del toro, no meridianas ni paralelas. 2.° Por mucho tiempo se admitió que «toda cónica que pase por cinco puntos de inflexión de una cuártica plana, contiene otros tres», hasta que *F. Klein* (*Math. Ann.*, tomo X, 1876, página 397) demostró su falsedad, deducida de la inspección de las hermosas láminas relativas á tales figuras publicadas por Beer en 1852.—*(N. T.)*

permite apreciar la insuficiencia de la recopilación efectuada. Se trata, en efecto, de hacer ver la posibilidad de construir (en un plano) un triángulo equilátero sobre cualquier segmento rectilíneo dado AB. Para ello se describen dos circunferencias de círculo de radio AB y centros A y B, respectivamente, y se trazan los segmentos rectilíneos que van del punto C, en que ambas se cortan, á los A y B. Deben ahora justificarse cada una de las partes de la demostración y cada una de las construcciones efectuadas, y esto por medio de proposiciones previamente establecidas. Que existen las dos circunferencias de centros A y B y radio AB se sigue, en efecto, del tercer postulado, según el cual se puede describir (en un plano) un círculo de centro y radio dados. Que existen los dos segmentos AC y BC se sigue del primer postulado, según el cual se puede trazar el segmento rectilíneo que va de uno á otro de dos puntos dados. Por consiguiente, en cuanto á las dos circunferencias y á los dos segmentos, está Euclides en condiciones de dar las referencias necesarias á proposiciones anteriores. Pero inmediatamente que se introduce la consideración de los dos círculos, se habla del punto C en que se cortan ambos. ¿En virtud de qué principio existe un punto de tal naturaleza? En la obra de Euclides no hay indicación alguna que á ello se refiera, y esta laguna no puede tampoco llenarse con sus propios materiales, pues nada hay antes del primer teorema que diga que aquellas circunferencias deban cortarse.

Si la intención de Euclides era, pues, hacer preceder á los teoremas los recursos necesarios para su demostración, y referirse más tarde á ellos en cada una de las deducciones y construcciones, no ha logrado por completo su propósito. Respecto de dicho primer teorema, hubiera debido sentar, por ejemplo, el siguiente principio: «Dos circunferencias de un plano, cada uno de los cuales pasa por el centro de la otra, se cortan», bien como un axioma, bien como teorema basado en una demostración. Se ve en seguida que la única causa de esta deficiencia es aquí la figura que acompaña á la proposición relativa al triángulo equilátero, cuando se intenta la demostración sin hacer la figura. Siempre se puede hacer uso de las dos circunferencias, puesto que así lo permite el tercer postulado; pero, para poder pasar adelante, falta todo apoyo

en tanto no se tiene la figura á la vista. Es verdad que la figura no deja lugar á duda sobre la existencia del punto C, mas tampoco la deja sobre la existencia de las circunferencias de centros A y B y de los segmentos AC y BC, y, sin embargo, la posibilidad de la construcción de tales circunferencias y segmentos ha sido enunciada y citada. ¿Por qué razón, siendo de evidencia casi igual, y estando justificadas por sencillas observaciones las diversas partes de la construcción, unas son expresamente formuladas y otras no?

No intentaremos marcar un límite de separación entre los procedimientos demostrativos que consisten en la aplicación de principios y definiciones anteriores, y los de cualquiera otra naturaleza—lo cual sería muy difícil de realizar—, pero sólo admitiremos como buenas aquellas demostraciones en que constantemente se refiere ó puede referirse á principios y definiciones anteriores. Cuando para la comprensión de una demostración es indispensable la figura correspondiente, la demostración no satisface las condiciones que nosotros le imponemos (condiciones que, ciertamente, se pueden cumplir); en una demostración perfecta, puede prescindirse de la figura. No sólo en la forma dada por Euclides, sino después de las múltiples transformaciones que en el transcurso del tiempo han experimentado, adolecen de dicha imperfección numerosas demostraciones de Geometría: sólo que en la obra de Euclides los errores aparecen manifiestos, y en ninguna parte están disimulados por palabras. No puede objetarse que muchas veces puede lograrse el fin perseguido sin el trazado de la figura, con sólo imaginarla. La figura imaginada es admisible únicamente en tanto que coincide con una real. Pero aunque se admitiese alguna, cuyo único origen fuese puramente imaginativo, no estaríamos dispensados de la obligación de dar cuenta exacta de los medios de demostración tomados de ella (*).

Supuesto el que no se conceda á la figura otro papel que el acabado de explicar, basta una sola, trazada á capricho, siempre que no se distingan varios casos en los teoremas y demostraciones. Según esto, cuando se trate de puntos cualesquiera, en lo posible se representarán en la figura, sin va-

(*) Véase, además, el final del § **12**.

cilar, por puntos propios, aun en el caso de no tratarse de puntos de esta especie. Así, por ejemplo, sólo se representa eficazmente que tres rectas tienen común un punto cualquiera P, cuando se toma como propio, y una vez hecho esto, se puede ya utilizar la figura, aunque, claro es, deberá examinarse entonces con gran cuidado si los diversos puntos resultan propios porque así deban ser, ó sólo por acaso.

---

§ 7.—Generalización del concepto de «recta»

34. Lo dicho hasta aquí no basta para resolver si se puede trazar siempre una recta por dos puntos arbitrarios, ni si los puntos comunes á dos planos están en línea recta, ni si un plano está determinado por tres cualesquiera de sus puntos no situados en una recta, ni si se puede trazar un plano por tres puntos cualesquiera. Las tres primeras cuestiones están íntimamente relacionadas entre sí, y de ellas vamos á ocuparnos ahora; la cuarta será objeto, más adelante, de un estudio especial.

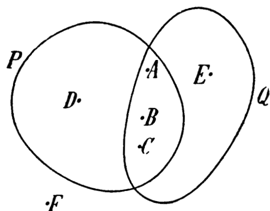


Fig. 14.

Sean A y B puntos cualesquiera. Si tomamos un punto propio D, tal que A, B y D no estén en línea recta, podremos trazar por A, B y D un plano determinado P; si E es un punto propio exterior al plano P, tampoco están en una recta los puntos A, B y F; luego por ellos pasa un plano determinado Q (*). Los planos P y Q pueden tener una recta común r; cuando esto ocurre, hay un haz de planos PQ de

(*) Por los teoremas 5.° y 3.° del § 6.—*(N. T.)*

arista r. Entonces, por el punto arbitrario F, no situado al mismo tiempo en los planos P y Q, pasa un plano del haz, y sólo uno que llamaremos R. Concretándonos ahora al caso en que F sea propio, podemos trazar el plano R sin utilizar la arista del haz de planos; dos puntos cualesquiera A y B de los comunes á los planos P y Q, juntos con el F, bastan para determinar el plano R.

En el caso de no haber recta común á los planos P y Q, es también aplicable la construcción dada para el plano R (*). Mas ocurre preguntar si el resultado de la construcción será independiente en todos los casos de los puntos comunes á los planos P y Q que se hayan utilizado, es decir, si, siendo A, B y C tres de estos puntos, los planos ABF y ACF coinciden

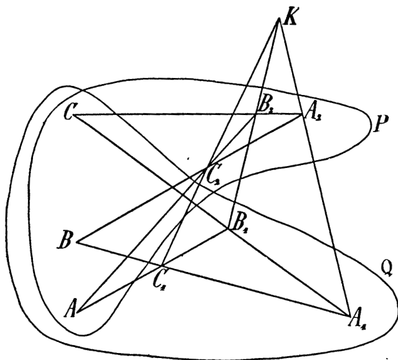


Fig. 15.

siempre; ó, en otros términos, si los puntos A, B, C y F están siempre en un plano. Puede demostrarse que así sucede, en efecto (**).

(*) En efecto, basta trazar la recta FA (intersección de los dos planos proyectantes de las dos rectas que determinan A), y, análogamente, la recta FB. Ambas determinan el plano FAB ó R.—(*N. T.*)

(**) La demostración que sigue se puede simplificar notablemente con

Designemos por A, B y C tres puntos cualesquiera comunes á los dos planos P y Q, y por F un punto propio no situado en aquellos planos, con lo cual ni A, B y F, ni A, C y E, ni B, C y F, están en línea recta. Tomemos en el plano Q el punto propio arbitrario A_1, no situado al mismo tiempo en P (de modo que no están en línea recta ni A, B y A_1, ni A, C y A_1, ni B, C y A_1); después, el punto propio B_1 (distinto del C), en la recta $A_1 C$, situado, respecto del plano P, al mismo lado que A_1; las rectas AB_1 y BA_1 son distintas una de otra y se cortan en un punto C_1 (*). Aunque sólo se necesita que sean propios A_1 y B_1—y precisamente el caso de que lo sea también alguno de los A, B y C no nos interesa—, representaremos sin inconveniente como propios los puntos A, B, C y A_1 en la figura aclaratoria, en atención á la importancia secundaria que debe atribuirse á ésta.

Los puntos A_1 y B_1 están al mismo lado de P; tomemos al

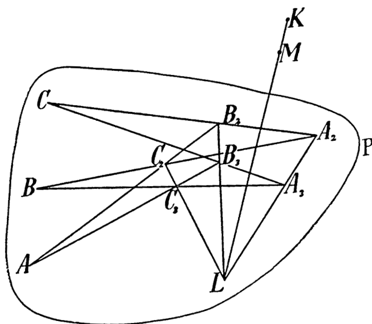


Fig. 16.

otro lado el punto propio K (no situado en Q). Entonces, el plano P es cortado por la recta KA_1 en un punto propio A_2,

ayuda de la adición al § **5**; véase la adición al presente artículo. — *(N. A.)*

(*) Mientras no se diga expresamente *punto propio*, no se olvide que la palabra *punto* se emplea como equivalente á *radiación*, con ó sin vértice. — *(N. T.)*

situado entre K y A_1; por la recta KB_1 en un punto propio B_2, entre K y B_1, y por la recta KC_1 en otro punto C_2. Los puntos A, B_2 y C_2 están los tres en el plano KB_1C_1 (por estar en las rectas B_1C_1, KB_1 y KC_1, respectivamente); los puntos B, C_2 y A_2, en el KC_1A_1; los puntos C, A_2 y B_2, en el KA_1B_1. Como A_2 y B_2 son puntos propios, se deduce que tanto A, B_2 y C_2, como B, C_2 y A_2 y C, A_2 y B_2 están en línea recta (*).

Elijamos ahora en el plano P el punto propio L arbitrariamente, pero fuera del plano Q y de las rectas B_2C_2, C_2A_2 y A_2B_2, y, además, en la recta A_2L, el punto propio A_3, entre A_2 y L. Entonces, los puntos A_1 y A_3 están contenidos en el plano A_2KL; por consiguiente, también lo está la recta A_1A_3, la cual, por no pasar entre A_2 y K, pero sí entre A_3 y L, pasa entre K y L (**), es decir, la recta KL es cortada por la A_1A_3 en un punto propio M entre K y L. Del mismo modo que se hizo con el punto K podemos operar con el punto M para hallar los puntos de intersección del plano P con las rectas MA_1, MB_1 y MC_1. Como K y M están al mismo lado del plano P, pero K y A_1 á distintos lados, ni M y A_1, ni M y B_1 están al mismo lado (***). Por consiguiente, no sólo es encontrado el plano P por la recta MA_1 en un punto propio A_3, sino también por la MB_1 en un punto propio B_3, y el punto A_3 está

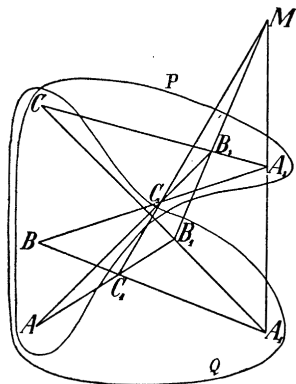


Fig. 17.

(*) Según el teorema 10.° del § **6**.

(**) Por el teorema 10.° del § **2**.—*(N. T.)*

(***) Según la definición y el primer teorema contenidos en el número **21**.—*(N. T.)*

en la recta A_2L entre A_2 y L, y el B_3 está en la recta B_2L (pues B_2, L y B_3 están al mismo tiempo en los planos P y B_1KM) entre B_2 y L (pues, en el plano B_2KL, la recta MB_1 pasa entre K y L, pero no entre K y B_2). Finalmente, el plano P es cortado por la recta MC_1 en un punto C_3 que pertenece á la recta C_2L (pues C_2L y C_3 son comunes á los planos P y C_1KM).

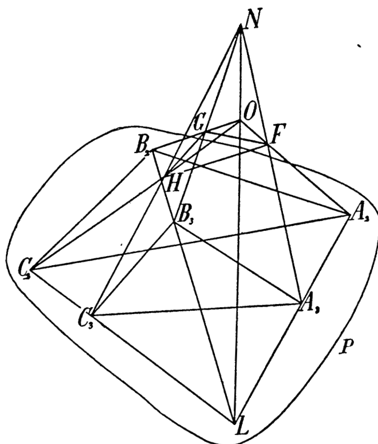


Fig. 18.

Según esto, tanto A, B_3 y C_3 como B, C_3 y A_3 y C, A_3 y B_3 están en línea recta (*) y las rectas A_2A_3, B_2B_3 y C_2C_3 concurren en el punto L. La figura así formada en el plano P contiene los puntos A, B y C como puntos de intersección de las rectas B_2C_2, C_2A_2 y A_2B_2 con las correspondientes B_3C_3, C_3A_3 y A_3B_3, y conduce, por intermedio de los puntos K y M, á los A_1, B_1 y C_1 tomados en el plano Q, como puntos de intersec-

(*) Pues, por ejemplo, A, B_3 y C_3 son comunes á los planos P y B_1C_1M.—(N. T.)

ción de las rectas KA_2, KB_2 y KC_2 con las MA_3, MB_3 y MC_3, respectivamente.

Hemos supuesto que el punto propio F está fuera del plano P. Si en la prolongación del segmento A_3F por el extremo F, tomamos el punto propio N, la recta A_2F estará situada en el plano A_3LN y encontrará á la recta LN en un punto propio O, entre L y N, y las rectas OA_2 y NA_3 se cortarán en el punto propio F. La recta OB_2 se halla en el plano B_3LN y corta á la NB_3 en un punto propio G, entre B_3 y N. Finalmente, las rectas OC_2 y NC_3, situadas en el plano C_3LN, dan un punto de intersección H. Los puntos F, G y H se pueden unir por las rectas GH, HF y FG. Como los planos OB_2C_2 y NB_3C_3 tienen comunes los puntos A, G y H y, por consiguiente, también la recta GH, el punto A está en dicha recta GH; análogamente, B está en la recta HF y C en la FG, y las tres rectas son distintas una de otra. El plano determinado por los puntos F, G y H contiene, pues, los puntos dados A, B y C, y los planos ABF, ACF y BCF son, por tanto, idénticos, como se quería demostrar.

Este resultado puede enunciarse en la siguiente forma: Si tres planos P, Q y R tienen dos puntos comunes A y B, todo punto común á dos de ellos está contenido también en el tercero. En efecto, si el punto C es común á los planos P y Q, y F es un punto propio del plano R (no situado en P ni en Q), los planos ABF y ACF coinciden, esto es, C está en el plano R. En general, si tres ó más planos pasan por dos puntos, por todo punto que pertenece á dos de ellos, pasan todos los demás.

35. Generalizando las definiciones hasta aquí establecidas, cuando tres planos P, Q y R tengan dos puntos comunes, diremos siempre que el plano R pertenece al haz de planos PQ, ya se haya reconocido ó no la existencia de una recta de intersección de estos planos. Si los planos P y Q tienen una recta común, diremos que R pertenece al haz de planos propio PQ. Pero, aunque no exista una recta de intersección de P y Q, por todo punto propio F se puede trazar un plano, y sólo uno, que pertenezca al haz PQ; pues si A y B son puntos comunes á P y Q, el plano ABF coincide con el R.

Los puntos A y B son comunes á cada dos planos tomados

arbitrariamente en el haz PQ, y extendiendo la denominación «plano del haz PQ» á los mismos P y Q, podemos decir que *dos planos cualesquiera pertenecen siempre á un haz de planos* y que *un haz de planos está determinado por dos cualesquiera de sus planos.*

Para designar un haz de planos se utiliza también una sola letra; en el haz propio de planos, convendremos en que toda denominación del haz sirva al mismo tiempo para su arista. Designemos por r un haz cualquiera de planos. Un punto que al mismo tiempo pertenece á dos planos del haz, es común á todos los planos del mismo; lo llamaremos punto del haz de planos r. Todo plano trazado por dos puntos del haz r pertenece á él y contiene, por tanto, todos los puntos del mismo. Si se designa por r un haz propio de planos, es decir, si r es la denominación de una recta, se toman como idénticas las expresiones «punto de la recta r» y «punto del haz propio de planos r», así como estas otras: «plano que pasa por la recta r» y «plano del haz r».

Según esto, podríamos prescindir por completo, de aquí en adelante, de usar la palabra «recta» y, en su lugar, hablar simplemente de haces de planos (propios y cualesquiera). Más conveniente es, sin embargo, extender aquel uso en la misma forma que se ha hecho ya con el de la expresión «haz de planos». Así, pues, no emplearemos más la palabra «recta» en el significado que hasta aquí tenía, sino que definimos como equivalentes las expresiones «A es un punto de la recta r» y «A es un punto del haz de planos r». Si, al mismo tiempo, se conviene en llamar recta propia á la r, cuando el haz de planos r sea propio, la expresión «recta propia» vendrá á substituir á la palabra «recta» sin calificativo, á la cual se ha dado ahora otra aplicación. Mas por esto no deben perder su validez las definiciones y denominaciones dadas anteriormente, salvo las excepciones indicadas ya al tratar de las radiaciones de rectas. Así, por ejemplo, llamamos radiación de rectas al conjunto de rectas cualesquiera (rayos) que pasan por un punto; si todos los puntos de la recta r están en el plano A, decimos: la recta r está en el plano R, etc.

36. Los teoremas establecidos en los artículos precedentes son ahora susceptibles de generalización; de ellos, sólo el tercero queda invariable.

1.° Por dos puntos se puede siempre trazar una recta.

Pues si se trazan los planos P y Q por los puntos A y B, éstos serán puntos del haz de planos PQ y, por consiguiente, «puntos de una recta».

2.° Toda recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos.

Pues si A y B son puntos de la recta r, esto es, puntos del haz de planos r, este haz está determinado por los puntos A y B.

3.° Por un punto propio y dos cualesquiera se puede trazar siempre un plano.

4.° Todo plano está determinado por tres cualesquiera de sus puntos, no situados en línea recta.

En otros términos: Si tres puntos están situados en dos planos, están en línea recta.

5.° Una recta que tiene dos puntos comunes con un plano, está situada por entero en él.

O de otro modo: un plano que contiene dos puntos de un haz, pasa por todos los puntos del mismo.

6.° Por una recta propia y un punto cualquiera, y también por una recta cualquiera y un punto propio, se puede siempre trazar un plano.

7.° Todo plano está determinado si de él se conocen una recta y un punto no situado en ella.

8.° Por una recta cualquiera y otra propia, que tengan un punto común, se puede siempre trazar un plano.

9.° Todo plano está determinado por dos cualesquiera de sus rectas.

10.° Toda recta que contiene un punto propio es recta propia.

11.° Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común.

En efecto: sean las rectas e y f, situadas en el plano P, y tracemos por cualquier punto propio M, exterior al plano, los planos eM y fM. Como éstos se cortan en una recta propia, los planos eM, fM y P tendrán común un punto N, y este punto N está en la recta e (pues está en los planos eM y P) y en la recta f (pues está en los planos fM y P).

12.° Una recta y un plano tienen siempre un punto común.

En efecto: dada la recta h y el plano P (de modo que h no esté en P), si se designa por Q un plano cualquiera trazado por h, y por g el haz de planos PQ, h y g son rectas del plano Q y, por consiguiente, se cortan, y el punto gh es común á la recta h y al plano P.

13.° Dos planos tienen siempre una recta común.

En efecto: por los planos P y Q se puede trazar un haz de planos PQ. Si se designa éste por r, se dice que P y Q son «planos que pasan por la recta r».

14.° Tres planos tienen siempre común un punto ó una recta.

En efecto: dos cualesquiera de los planos P, Q y R, por ejemplo, los P y Q, dan una recta de intersección r, y esta recta está en el plano R ó tiene un punto común con él. En este último caso, el punto rR es el de intersección de los planos P, Q y R.

37. Salvo el teorema 10.°, no tenemos medio alguno para distinguir si la recta á que conduce una construcción determinada es ó no recta propia, advirtiendo que, al hablar aquí de construcción, empleamos esta palabra ampliando su significado — ampliación que también sufre el de la palabra figura—al admitir también ahora rectas cualesquiera en lugar de rectas propias. Una recta se define por dos de sus puntos ó de sus planos. El encuentro de dos rectas de un plano ó de una recta y un plano ó de tres planos, da lugar á nuevos puntos; y la unión de dos puntos ó la intersección de dos planos da lugar á nuevas rectas; únicamente para la obtención de planos no pueden utilizarse elementos cualesquiera, sino que uno de ellos ha de ser un punto propio ó una recta propia. Pero, siempre que no sea precisa ninguna recta propia, se puede hacer abstracción de las rectas y operar con dos puntos ó dos planos que pertenezcan á ellas. La necesidad de tal substitución puede ser debida á que la extensión del campo de construcción sea limitada.

Después de lo dicho al final del artículo precedente, casi no hace falta añadir que en toda ocasión en que se haga uso de figuras para aclarar los razonamientos, podrán emplearse en ellas rectas propias en lugar de rectas cualesquiera, y así lo haremos nosotros siempre, porque de esta manera cumplen las figuras mejor su cometido. No se hubiera podido hacer

asequible á la Geometría esta importante ventaja, si no se hubiese dado á la aplicación de las palabras «punto» y «recta» toda la extensión que se reconoció como posible, y que en seguida ha sido confirmada por una gran flexibilidad del lenguaje.

38. Una cierta clase de proposiciones ha quedado limitada á puntos y rectas propios, porque sólo de tres puntos propios de una recta puede decirse que uno de ellos está entre los otros dos. Pero algunas de aquellas proposiciones no contienen de un modo explícito el concepto aún no generalizado, sino el concepto derivado de pares separados. Este último es susceptible ahora de generalización, en igual forma que los de punto, recta y el mismo de plano, y vamos á establecerlo para puntos cualesquiera de una recta arbitraria. Ya en el artículo anterior hubiera podido hacerse esta generalización á puntos cualesquiera de una recta propia, pero no nos hubiera evitado esto una repetición de los mismos razonamientos en este lugar.

Tomemos en una recta cualquiera r los puntos A, B, C y D y designemos por M y M' dos puntos propios, exteriores á la

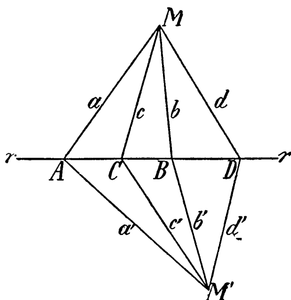


Fig. 19.

recta r, por U y U' los planos rM y rM', por a, b, c y d las rectas propias MA, MB, MC y MD del plano U, y por a', b', c' y d' las rectas propias $M'A$, $M'B$, $M'C$ y $M'D$ del

plano U'. En tal caso, podrá ocurrir que b y c estén separadas por a y d, que lo estén a y c por b y d ó que lo estén a y b por c y d. Supongamos que a y b están separadas por c y d, y vamos á demostrar que también, entonces, están separadas a' y b' por c' y d'.

En el caso de ser diferente uno de otro los planos U y U', la demostración resulta en seguida de lo dicho al final del § **4** (**23**); pues, designando por P, Q, R y S los planos aa', bb', cc' y dd' que pasan por la recta MM', los planos P y Q estarán separados por los R y S, en virtud del teorema expuesto en el núm. **23**, y, por consiguiente, según el recíproco, cuya certeza fué establecida en el mismo párrafo, también a' y b' están separados por c' y d'. Si los planos U y U' coinciden en uno, se toma fuera de él un punto propio M'', que se une con los A, B, C y D por medio de las rectas a'', b'', c'' y d'', y entonces, de lo que acabamos de decir se deduce que, por estar las rectas a y b separadas por las c y d, lo están las a'' y b'' por las c'' y d'' y, por consecuencia, también las a' y b' por las c' y d'.

Según esto, la propiedad de estar separadas las rectas MA y MB por las MC y MD es independiente de la elección del punto propio M, lo cual da lugar á una división de los puntos A, B, C y D, tomados en la recta r, en dos pares AB y CD.

Esta división coincide con una ya considerada cuando A, B, C y D son puntos propios. Entonces, la recta r es propia; si los puntos C y D perteneciesen al segmento AB, las semirectas MC y MD estarían entre las MA y MB, y las rectas a y b no estarían separadas por las c y d. Por consiguiente, los puntos C y D no pueden ser los dos interiores al segmento AB; tampoco pueden ser ambos exteriores al mismo segmento, luego se hallarán uno dentro y otro fuera del segmento AB, es decir, los puntos A y B están separados por los C y D. Según esto, cuando, tratándose de puntos cualesquiera de una recta cualquiera, se diga que los A y B están separados por los C y D (ó que C está entre A y B, por exclusión de D, ó respecto del punto límite E), debe entenderse que, tomando un punto propio M fuera de aquella recta, las MA y MB están separadas por las MC y MD. Introduciendo esta locución, podemos aplicar con

toda generalidad á puntos cualesquiera de una recta cualra, todas las proposiciones en que únicamente se trate de pares de puntos separados en una recta.

Si los puntos A, B, C *y* E *pertenecen á una recta, los* B *y* C *están separados por los* A *y* E, *ó lo están los* C *y* A *por los* B *y* E, *ó lo están los* A *y* B *por los* C *y* E, *y cada una de estas posiciones excluye las otras dos.*

Si los puntos A, B *y* E *pertenecen á una recta, se puede elegir en ella el punto* C, *de manera que los* A *y* B *estén separados por los* C *y* E.

Si, en una recta, los puntos A *y* B *están separados por los de uno de los pares* CE *ó* DE, *pero no por los del otro, los* A *y* B *están separados por los* C *y* D. *En caso contrario,* A *y* B *no están separados por* C *y* D.

Si, en una recta, los puntos A *y* B *están separados por los* C *y* E, *también los* C *y* E *están separados por los* A *y* B.

Adición al § 7.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1888, tomo XXXII, pág. 159.)

En el número **34** del artículo anterior, hemos designado por A, B y C tres puntos pertenecientes al mismo tiempo á los dos planos P y Q, y por F un punto propio no situado en ninguno de los dos planos, y hemos probado que, entonces, los puntos A, B, C y F están en un plano.

La demostración dada para esto en dicho artículo se puede abreviar ahora. Para conseguirlo, construyamos la figura 15 en la forma explicada (**34**), pero de modo que el punto propio K se elija fuera, no sólo del plano Q, sino también de los planos FB_1C_1, FC_1A_1 y FA_1B_1. Entonces, los puntos A_2, B_2 y C_2 están en el plano P, y los A_1B_1 y C_1 en el Q, de tal modo que las rectas B_2C_2 y B_1C_1 se encuentran en A, las C_2A_2 y C_1A_1 en B, y las A_2B_2 y A_1B_1 en C. Si se une F con K, A_2, B_2, C_2, A_1, B_1, C_1, A, B y C por medio de las rectas $l, p, q, r, p', q', r', p'', q''$ y r'', éstas son diferentes entre sí, y ni las p, q y r, ni las p', q' y r' están en un plano. Mas, como las contenidas en cada uno de los grupos lpp', lqq', lrr', $p''qr$, $p''q'r'$,

$q''rp$, $q''r'p'$, $r''pq$ y $r''p'q'$ están en un plano, los planos pp' qq' y rr' se cortan en l y los qr y $q'r'$, los rp y $r'p'$ y los pq y $p'q'$ se cortan en p'', q'' y r'', respectivamente. Por consiguiente, p'', q'' y r'' son rectas de un plano (adición al § **5**) y, en consecuencia, A, B, C y F son puntos de un plano.

---

§ 8. — Generalización del concepto de «plano»

39. Los teoremas 3.°, 6.° y 8.° del artículo precedente inducen á preguntar si se podrá trazar un plano por tres puntos, por una recta y un punto ó por dos rectas que se cortan, en el caso de no ser propio ninguno de estos elementos. Sean A, B y C tres puntos cualesquiera no situados en línea recta. Si por ellos pasa un plano, á él pertenecen las rectas AB, AC y BC, y el plano queda también determinado por la recta AB y el punto C ó por las rectas AB y AC; si tomamos en la recta AB el punto D (distinto de los A y B), y en la recta AC el punto E (distinto de los A y C, con lo cual también D y E son distintos), dentro de la misma hipótesis, también DE es una recta de aquel plano, y debe encontrar en un punto á la recta BC. Vamos á demostrar ahora que esta relación entre las rectas BC y DE es independiente de la existencia de un plano que pase por A, B y C; esto es, que las rectas BC y DE se cortan en todos los casos.

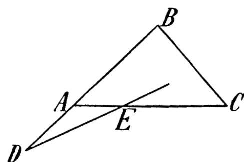


Fig. 20.

Para la demostración (*) tomamos una recta propia auxi-

(*) Dada por primera vez en una de mis lecciones en Diciembre de 1873.

liar que no encuentre á ninguna de las cuatro rectas AB, AC, BC y DE, y en ella los puntos propios K, L y M, de tal modo, que no puedan ser unidos A, B y C con K ni con M por medio de planos (*). Elijamos en la recta MA el punto propio A_1 (distinto de los M y A) y designemos por A_2 el punto de intersección de las rectas KA y LA_1, situadas en el plano AKM. Finalmente, tracemos por A_2 un plano P que no contenga á ninguno de los puntos hasta aquí citados. El plano P es encontrado por la recta KA en A_2 y supongamos que es cortado por las KB, KC, KD y KE en los puntos que designamos por B_2, C_2, D_2 y E_2, respectivamente. Estos puntos son distintos entre sí y de los anteriores (**); los A_2, B_2 y C_2 no están en línea recta; por el contrario, lo están los A_2, B_2 y D_2 (por estar en los planos P y ABK), y también los A_2, C_2 y E_2 (por estar en los planos P y ACK).

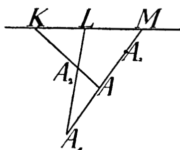


Fig. 21.

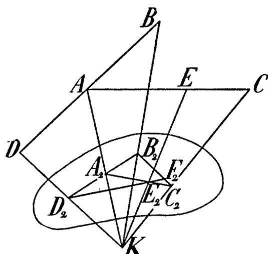


Fig. 22.

Si A_3, B_3, C_3, D_3 y E_3 son los puntos de intersección del plano P con las rectas MA, MB, MC, MD y ME, también son distintos entre sí y de los puntos A, B, C, D, E, K, L, M y A_1; los A_3, B_3 y D_3, así como los A_3, C_3 y E_3 están, respectivamente, en línea recta; pero no ocurre lo mismo á los A_3, B_3 y C_3. Como estas figuras están

(*) Que esto es siempre factible, se ve fácilmente. Para lo primero basta trazar por un punto propio no situado en ninguna de las rectas dadas una recta no situada en ninguno de los cuatro planos proyectantes desde dicho punto. Para lo segundo basta observar que, en virtud de la hipótesis anterior, ó no existe en dicha recta ningún punto propio situado en un plano con los A, B y C, ó sólo hay uno. (§ **7**, T. 5.° y 11.°).—*(N. T.)*

(**) De las anteriores, por la construcción del plano P; entre sí, por el teorema 2.° del § anterior.—*(N. T.)*

contenidas en un plano, las rectas B_2C_2 y D_2E_2 se encuentran en un punto F_2, y las rectas B_3C_3 y D_3E_3 en un punto F_3.

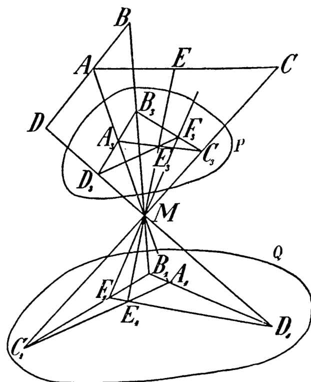


Fig. 23.

Si es cierta nuestra afirmación de que BC y DE tienen un punto común, en él deben encontrarse las rectas KF_2 y MF_3, lo mismo que las KA_2 y MA_3 se encuentran en A, las KB_2 y MB_3 en B, las KC_2 y MC_3 en C, las KD_2 y MD_3 en D y las KE_2 y ME_3 en E. Veamos, pues, si KF_2 y MF_3 están en un plano; para ello es, sin embargo, necesario efectuar nuevas construcciones.

Las rectas LA_2 y MA_3 tienen común el punto propio A_1. También las LB_2 y MB_3, por estar situadas en el plano BKM, determinan un punto de intersección B_1 y, análogamente, las LC_2 y MC_3, las LD_2 y MD_3 y las LE_2 y ME_3 determinan los puntos C_1, D_1 y E_1. Es fácil ver que, tanto los puntos A_1, B_1 y D_1, como los A_1, C_1 y E_1 están en línea recta; pues los planos A_2B_2L y A_3B_3M son distintos uno de otro y tienen comunes los puntos A_1, B_1 y D_1, y también son distintos entre sí los planos A_2C_2L y A_3C_3M y tienen comunes los puntos A_1, C_1 y E_1. Pero los puntos A_1, B_1 y C_1 no están en línea recta, porque las rec-

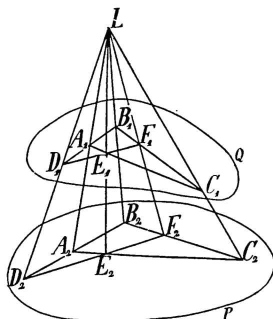


Fig. 24.

tas MA, MB y MC no están en un plano; determinan, pues, un plano Q que contiene la recta A_1B_1 con el punto D_1, y la A_1C_1 con el punto E_1. Ahora bien; si las rectas KF_2 y MF_3 están en un plano, éste debe contener también las LF y MF_3 y, en efecto, ahora puede hallarse el punto común á estas dos rectas.

El plano Q contiene las rectas B_1C_1 y D_1E_1, las cuales tienen, por tanto, un punto común F_1 (L, M y F_1 no están en línea recta). Los puntos L, F_2 y F_1 están en una recta (en los planos B_2C_2L y D_2E_2L); también los M, F_3 y F_1 (en los planos B_3C_3M y D_3E_3M); por consiguiente, las rectas LF_2 y MF_3 se encuentran en F_1, y las rectas KF_2 y MF_3 del plano LMF_1 se cortarán en un punto F. Los puntos B, C y F están en una recta (en los planos B_2C_2K y B_3C_3M); lo mismo ocurre á los D, E y F (en los planos D_2E_2K y D_3E_3M); luego las rectas BC y DE tienen el punto F común, con lo cual queda demostrado lo que nos proponíamos.

40. Los puntos B, C, D y E estaban sujetos á la condición de no estar tres de ellos en línea recta, y á la de que las rectas BD y CE se cortasen en un punto A. Ahora bien; así como esta condición obliga á cortarse á las rectas BC y DE, de igual manera trae como consecuencia la intersección de las rectas CD y BE. Pero se puede prescindir de la condición de que entre los puntos B, C, D y E no haya tres en línea recta, y enunciar, por tanto, el siguiente teorema:

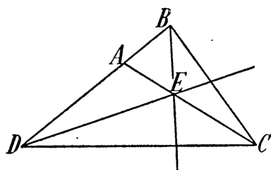


Fig. 25.

Si los puntos A, B, C *y* D *se eligen de modo que las rectas* BC *y* AD *se encuentren, también las rectas* CA *y* BD, *así como las* AB *y* CE, *se cortan.*

Tales puntos ofrecen un singular interés en este sitio, siempre que tres cualesquiera de ellos no estén en línea recta y, por consiguiente, que el punto de intersección E de las rectas BC y AD no coincida con ninguno de aquellos cuatro. Cuando por los puntos A, B y C pasa un plano, el punto E y la recta ED están contenidos en él y, por tanto, el punto D está situado en el plano ABC. Pero, aunque no pueda afirmarse la

existencia de un plano que pase por A, B y C, diremos también que el punto D está en el plano ABC, no limitando el significado de la palabra plano al que hasta aquí tenía. En adelante, pues, al decir que «D está en el plano ABC»—en lo cual se supone, desde luego, que A, B, C y D son puntos entre los cuales no hay tres en línea recta—no expresaremos otra cosa que la propiedad de que las rectas BC y AD y, por tanto, las CA y BD y las AB y CD se cortan, mientras que reservaremos la denominación «plano propio» para emplearlo donde, según el modo de hablar hasta aquí, debiera decirse, simplemente, plano. Los puntos A, B y C pueden ser cualesquiera, y también el A está en el plano BCD, etc.

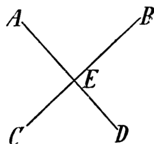


Fig. 26.

Consideremos el punto E, situado en la recta BC, sin coincidir con B ni C, y el A, exterior á BC. Se obtiene un punto D «situado en el plano ABC», tomando en la recta AE un punto cualquiera, sin otra restricción que la de ser diferente de los A y E, mientras se mantengan todas las condiciones contenidas en la anterior definición. Es conveniente prescindir de esta posición excepcional de los puntos A y E en la recta AE, y llamar también «puntos del plano ABC» á los de las rectas BC, CA y AB (por tanto, en particular, á los mismos A, B y C), pero sin modificar en nada la condición de que A, B y C no estén en línea recta.

41. Si A, B y C son puntos cualesquiera, pero no situados en una recta, podemos hablar de un plano ABC, esto es, se puede hallar un punto D, tal que «esté situado en el plano ABC», y para esto se puede elegir, no sólo un punto de las rectas BC, CA y AB, sino también un punto fuera de ellas. Designemos por F el punto de la recta AB, cuya recta de unión con C pasa por D; las rectas AB y CF son distintas entre sí, y todo punto de la recta CF está en el plano ABC. Nada de esto se modifica, sin embargo, al substituir A y B por dos puntos cualesquiera

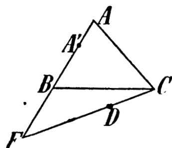


Fig. 27.

de la recta AB. Por consiguiente, si A' es un punto cualquiera de la recta AB, distinto del A, también el D está en el plano $A'BC$.

Esta observación se puede generalizar, puesto que la única condición supuesta es que A' esté en el plano ABC y fuera de la recta BC. Las rectas BC y AA' se cortan en un punto G, el cual puede coincidir con B ó C; supongamos que sea distinto del B. Entonces, todo punto del plano ABC está en el ABG y, por consiguiente, en el $A'BG$, luego también en el $A'BC$. Como, según esto, el mismo A' pertenece al plano $A'BC$, resulta que todo punto del plano $A'BC$ está situado también en el ABC. Los dos planos ABG y $A'BC$ son, pues, idénticos.

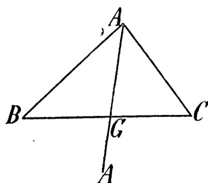


Fig. 28.

Sean ahora A', B' y C' puntos cualesquiera del plano ABC, pero no situados en una recta. Entonces, se obtiene la identidad de los planos ABC y $A'B'C'$ como en la demostración del teorema 3.° del § **2**. Por consiguiente, *el plano* ABC *está completamente determinado por la condición de que deba contener tres puntos* A', B' *y* C' *no situados en línea recta.*

42. Todas las definiciones y denominaciones relativas á los planos se conservan, prescindiendo de las excepciones ya indicadas al tratar de los conceptos «punto» y «recta». Podemos, pues, enunciar del siguiente modo las generalizaciones introducidas ahora en los teoremas 1.° al 14.° del artículo anterior (con repetición de las proposiciones cuyo contenido no ha sufrido variación).

1.° Por dos puntos se puede siempre trazar una recta.

2.° Toda recta está determinada por dos cualesquiera de sus puntos.

3.° Toda recta que contiene un punto propio es una recta propia.

4.° Por tres puntos se puede siempre trazar un plano.

5.° Todo plano está determinado por tres cualesquiera de sus puntos no situados en línea recta.

6.° Todo plano que contiene un punto propio es un plano propio.

7.° Una recta que tiene dos puntos comunes con un plano está contenida por completo en él.

8.° Por una recta y un punto se puede trazar siempre un plano.

9.° Todo plano está determinado, si de él se conocen una recta y un punto fuera de ella.

10.° Por dos rectas que tienen un punto común se puede trazar siempre un plano.

11.° Todo plano está determinado por dos cualesquiera de sus rectas.

12.° Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común.

En efecto; sean e y f dos rectas situadas en el plano P. Si se toman dos puntos A y B arbitrariamente en la recta e, y dos puntos C y D en la recta f, de modo que C no esté en e ni, por tanto, A, B y C pertenezcan á una recta, entonces el plano ABC es el mismo P, y D está en el plano ABC. Por consiguiente, las rectas AB y CD tienen un punto común.

43. En cuanto á la intersección de una recta con un plano, ó á la intersección de dos planos, sólo sabemos hasta ahora que una recta y un plano propio tienen siempre un punto común, y que dos planos propios siempre tienen una recta común. Pero de esto podemos ahora deducir que también un plano propio y otro cualquiera siempre tienen común una recta. Si tomamos, en efecto, el punto A en el plano arbitrario P, fuera del plano propio Q, y trazamos en P por A dos rectas, éstas encuentran al plano propio Q en dos puntos B y C, y los planos P y Q tienen común la recta BC.

13.° Una recta y un plano siempre tienen un punto común.

En efecto; sea la recta h, no situada por entero en el plano P. Si se toma el punto propio A, fuera de la recta h, ésta pertenece al plano propio hA. Los planos P y hA tienen común una recta k; y las rectas h y k se cortan en un punto, el cual está contenido en h y P.

14.° Dos planos siempre tienen una recta común.

En efecto; tomemos en el plano P el punto A exterior al plano Q, y tracemos por él dos rectas situadas en P. El plano Q es cortado por ésta en dos puntos B y C, y la recta BC está al mismo tiempo en P y Q.

15.° Tres planos tienen siempre un punto ó una recta común.

44. Mientras no se pueda afirmar de un plano que es propio, deberá representársele por tres puntos, ó por una recta y un punto, ó por dos rectas. Sin embargo, cuando se presente un plano cualquiera y se aclare la explicación con una figura, nada nos impedirá tomar en ella dicho plano como propio, de igual modo que se hizo respecto de los puntos y rectas. Por consiguiente, si se habla de cuatro rectas a, b, c y d, que están situadas en un plano cualquiera U y deben cortarse en un punto M, no habrá inconveniente en representar tal haz de rectas sobre un plano propio, con un vértice propio, y en refe-

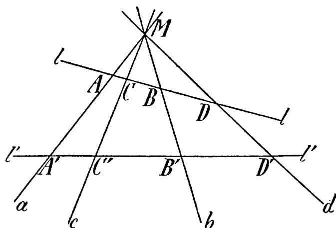


Fig. 29.

rirnos á él en lo sucesivo. Si se habla de una recta cualquiera l (que no pasa por M), situada en el plano U, la indicaremos en la figura, sin dudar, por una recta propia, y los puntos A, B, C y D, en los que las rectas a, b, c y d son cortadas por la l, como puntos propios. Los puntos A, B, C y D se descomponen en dos pares, de modo que los de un par están separados por los del otro; por ejemplo, los A y B están separados por los C y D. Designando por l' otra recta del plano U (que no pase por M), y por A', B', C' y D' sus puntos de intersección con a, b, c y d, resulta de las siguientes consideraciones que también A' y B' están separadas por C' y D'. Tomemos fuera del plano U un punto propio arbitrario N, que se une con el M por medio de la recta propia k, y consideremos los planos propios P, Q, R y S que esta recta determina con las a, b, c y d. Como estos planos son cortados por el plano pro-

pio lN en los rayos NA, NB, NC y ND de un haz de vértice propio N, y, además, según la definición dada en los artículos precedentes, los rayos NA y NB están separados por los NC y ND, del teorema contenido en el núm. **23** resulta que los planos P y Q están separados por los R y S. Finalmente, como los planos P, Q, R y S son cortados por el plano propio $l'N$ en los rayos NA', NB', NC' y ND' de un haz de vértice propio N, resulta del mismo teorema del núm. **23** que los rayos NA' y NB' están separados por los NC' y ND'; y, por consiguiente, según la citada definición, también lo están los puntos A' y B' por los C' y D'.

Según esto, de cualquier modo que se tome en el plano U la recta l (que no pase por M), siempre resultan formados los mismos pares por las rectas a, b, c y d, los cuales tienen como consecuencia que los puntos al y bl están separados por los cl y dl. Mientras M sea un punto propio y, por tanto, el plano U y las rectas a, b, c y d sean también propios, se obtiene la denominación adecuada para aquella separación en parejas, aplicando á los puntos A, N, C y D la definición usual, esto es, designando á las rectas a y b como separadas por las c y d. Coincidiendo con el modo de expresión ya usado para este caso especial, diremos, en todos los casos, que a y b están separadas por c y d (ó que c está entre a y b respecto del rayo límite d), si eligiendo en el plano del haz una recta arbitraria l (que no pase por el vértice), los puntos al y bl están separados por los cl y dl.

Todas las proposiciones establecidas en el § **3** *relativas á pares separados de rayos, en un haz de rectas, subsisten con toda generalidad.*

45. Falta todavía extender al haz de planos esta generalización de concepto. Sean ahora P, Q, R y S cuatro planos cualesquiera trazados por una recta arbitraria k. Si el plano U (que no contiene la arista k) es cortado por la recta k en el punto M y por los planos P, Q, R y S en las rectas a, b, c y d, respectivamente, éstas forman un haz; supongamos que las a y b, por ejemplo, están separadas por las c y d. Dicha arista y dichos planos serán cortados por otro plano U' (que tampoco pase por k) en el punto M' y las rectas a', b', c' y d', respectivamente. Pues bien; en este caso también a' y b' están separadas por c' y d'. Sean, en efecto, en primer lugar, M y M'

distintos. Entonces, la recta k no es cortada por la de intersección l de los planos U y U', y los puntos de intersección A, B, C y D de la recta l con los planos P, Q, R y S son distintos entre sí. En el punto A concurren los planos U, U' y P; por consiguiente, también las rectas a y a', y, análogamente, las b y b' concurren en B, las c y c' en C, y las d y d' en D. De la hipótesis hecha respecto de las rectas a, b, c y d resulta, recordando las definiciones que dimos ha poco para el haz de rectas, que los puntos A y B están separados por los C y D, y de aquí, además, que las rectas a' y b' están separadas por las c' y d'. Si, por el contrario, coinciden los puntos M y M', se toma un plano auxiliar U'' que corte á la arista k en un punto M'' distinto de M, y á los planos P, Q, R y S en las rectas a'', b'', c'' y d''. Entonces, podemos deducir, primero, que a'' y b'' están separadas por c'' y d'', y de aquí, en seguida, que a' y b' lo están por c' y d'.

Si k es una recta propia y, por consiguiente, P, Q, R y S planos propios, trasladando M á un punto propio de k, U será plano propio, y a, b, c y d rectas propias; entonces, se halla que los planos P y Q están separados por los R y S (**24**). Sin embargo, diremos en todos los casos que P y Q están separados por R y S (ó que R está entre P y Q respecto del plano límite S), cuando eligiendo un plano cualquiera U (que no pase por la arista del haz), las rectas PU y QU estén separadas por las RM y SU. *También aquí subsisten todas las proposiciones que se enunciaron en el* § **4** *relativas á pares de planos separados.*

46. La definición dada para el haz de planos, se puede todavía substituir por otra. Sean l una recta cualquiera que no corta á la arista; A, B, C y D los puntos de intersección de l con los cuatro planos, y M cualquier punto de la arista. Si los puntos A y B están separados por los C y D, también lo están las rectas MA y MB por las MC y MD, y recíprocamente. Por consiguiente, estarán ó no separados los planos P y Q por los R y S, según que, tomando una recta l que no corte á la arista, los puntos Pl y Ql estén ó no separados por los Rl y Sl.

En general, sean A, B, C y D cuatro puntos cualesquiera de una recta; unámoslos con un punto arbitrario exterior á la misma por medio de las rectas a, b, c y d, y tracemos por estas cuatro rectas y, por tanto, también por aquellos puntos,

los planos P, Q, R y S de un haz. Si en una cualquiera de las tres figuras $PQRS$, $ABCD$ y $abcd$, los dos primeros elementos (puntos, rectas ó planos) están separados por los otros dos, lo mismo sucede en las otras dos.

Adición al § 8.

(Véase *Mathematische Annalen,* 1888, tomo XXXII, pág. 159.)

En el artículo anterior (**39**) hemos visto que si B, C, D y E son puntos entre los cuales no hay tres en línea recta, y las rectas BC y DE se encuentran en un punto A, también las BC y DE tienen un punto común.

La demostración allí dada puede, ahora, abreviarse. En primer lugar se observa *(fig. 31)*, que si los puntos A, B y D están en línea recta, también lo están los A, C y E, pero no ocurre lo mismo con otros tres cualesquiera de los A, B, C, D y E. Si, pues, el punto K es propio, las rectas KA, KB y KD están en un plano, y también lo están las KA, KC y KE, pero, eligiendo convenientemente K, no lo están otras tres cualesquiera de las KA, KB, KC, KD y KE. Designemos, además, por P un plano que no contiene ninguno de los puntos A, B, C, D, E y K, ni el de intersección de la recta BC con el plano KDE, ó de la recta DE con el plano KBC. Si el plano P es cortado por las cinco rectas en A_2, B_2, C_2, D_2 y E_2, y F_2 es el punto de intersección de B_2C_2 con D_2E_2, los puntos de cada uno de los grupos

$$ABD,\ ACE,\ A_2B_2D_2,\ A_2C_2E_2,\ B_2C_2F_2,\ D_2E_2F_2$$
$$KAA_2,\ KBB_2,\ KCC_2,\ KDD_2,\ KEE_2$$

están en un plano, pero no lo están otros tres cualesquiera de los 12 nombrados. Si L es otro punto propio exterior al plano P, y se le une con aquellos 12 puntos por medio de las rectas a, b, c, d, e, k, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2 y f_2, también están en un plano las rectas de cada uno de los grupos

$$abd,\ ace,\ a_2b_2d_2,\ a_2c_2e_2,\ b_2c_2f_2,\ d_2e_2f_2,$$
$$kaa_2,\ kbb_2,\ kcc_2,\ kdd_2,\ kee_2;$$

pero, eligiendo convenientemente L, no lo están otras tres cualesquiera de estas 12 rectas. Finalmente, designemos por A', B' y C' los puntos de intersección de las rectas BC y B_2C_2, DE y D_2E_2, y BD y B_2D_2; y por a', b' y c' las rectas LA', LB' y LC'. Como A', B' y C' son distintos y están en P, también son distintas a', b' y c'; A' no está en BB_2, ni B' en BD_2, y C' es distinta de B, D, B_2 y D_2.

De la adición al § **5** se deduce que los planos ab y a_2b_2, ac y a_2c_2, y bc y b_2c_2 se cortan en tres rectas de un haz; por consiguiente, las rectas de intersección de los planos bd y b_2d_2, y ae y a_2e_2 están en un haz con la a'. Además, de dicha adición al § **5** se deduce que los planos ad y a_2d_2, ae y a_2e_2, y de y d_2e_2 se cortan en tres rayos de un haz; por tanto, las rectas de intersección de los planos bd y b_2d_2, y ae y a_2e_2 están en un haz, no solamente con la a', sino también con la b'; la recta c' intersección de los planos bd y b_2d_2 está en un plano con las a' y b'; y los planos bd, b_2d_2 y $a'b'$ pasan por c_2. Ahora, de lo expuesto en la citada adición al § **5** se deduce que los planos bb_2 y dd_2, ba' y db', y b_2a' y d_2b' se cortan en tres rayos de un haz. Como el primero de éstos coincide con k, el tercero con f_2, el plano ba' con el bc, y el plano db' con el de, la intersección de los planos bc y de debe estar contenida en el plano kf_2 y tiene, por tanto, un punto F común con la recta KF_2. Por KF_2 pasan los planos KBC y KDE, y por F los LBC y LDE, luego por este punto pasan KBC y LBC, y KDE y LDE, y, en consecuencia, las rectas BC y DE.

§ 9.—Generalización del concepto de «entre»

47. Los resultados obtenidos hasta aquí provienen, sin excepción, de los axiomas expuestos en los §§ **1** y **2**; pero, desde el § **3** en adelante, se han utilizado, no los axiomas mismos, sino los teoremas deducidos de ellos, por consiguiente, en el fondo, los teoremas 4.° á 9.° y el 12.° del § **1**, y los 2.°, 3.°, 4.°, 9.° y 10.° del § **2**, todos los cuales se refieren á puntos, rectas y planos propios. Después de la generalización dada al significado de las palabras «punto», «recta» y «plano», una parte de aquellos teoremas continúa siendo cierta y podría, por tanto, ser incorporada al resumen hecho en el § **8**, al cual podrían añadirse aún algunos nuevos teoremas, mostrando ya, con este aumento, el valor de los concepceptos ampliados. Dos rectas de un plano tienen, siempre, común un punto, lo mismo que una recta y un plano; dos planos tienen, siempre, común una recta, y tres planos, un punto. Con esto se evitan las distinciones que, al tratar de elementos propios, exclusivamente, era preciso establecer.

Los teoremas 4.° y 5.° del § **1** y los 2.°, 3.°, 4.° y 9.° del § **2**, se podían aplicar á elementos cualesquiera; no así los 6.°, 7.°, 8.°, 9.° y 12.° del § **1** y el 10.° del § **2**. Sin embargo, el concepto de pares de puntos separados en una recta se ha introducido también para el caso de puntos cualesquiera, y ha servido para obtener nuevamente los teoremas que, para tales pares, se expusieron en el § **1** (véase el final del § **7**). Este concepto hace ver una perfecta analogía en las relacio-

nes que, para puntos propios, fueron enunciadas en los teoremas 6.°, 7.°, 8.°, 9.° y 12.° del § **1**, á condición de no considerar más que puntos de una recta. Para hacer resaltar bien esta analogía, diremos que «el punto *C* está entre los *A* y *B*, por exclusión del *D* (ó respecto del punto límite *D*)» cuando *A*, *B*, *C* y *D* sean puntos de una recta y los dos primeros estén separados por los otros dos. Consideremos cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* en tal posición. Si todos ellos son propios, uno de los puntos *C* y *D* está entre los *A* y *B* y el otro no. Si *A*, *B* y *C* son puntos propios y el *C* está entre los *A* y *B*, el *D* no es punto del segmento *AB*. Si *A* y *B* son puntos propios y *D* no pertenece al segmento *AB*, *C* es un punto propio situado entre *A* y *B*; pues, si se unen los puntos *A*, *B*, *C* y *D* con uno propio *M*, exterior á la recta *AB*, los rayos *MA* y *MB* están separados por los *MC* y *MD*, y los semirayos *MA* y *MB* están al mismo lado de la recta *MD*, luego un semirayo de la recta *MC* está entre los *MA* y *MB*, esto es, *MC* encuentra á *AB* entre *A* y *B*.

Si, pues, A, B, C *y* D *designan puntos de una recta, y los* A *y* B *son propios, el par* AB *está separado por el* CD *si uno de los puntos* C *y* D *es propio y está entre* A *y* B, *y el otro no*, y recíprocamente.

48. Únicamente el teorema 10.° del § **2** no se ha extendido de ningún modo al caso de elementos cualesquiera.

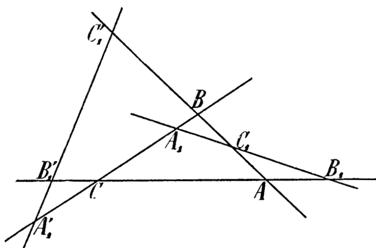


Fig. 30.

Sean *A*, *B* y *C* puntos propios que no pertenecen á una recta, y A_1, B_1 y C_1 los puntos en que una recta del plano *ABC* corta

respectivamente, á las BC, CA y AB. Aquel teorema expresa, entonces, que si A_1 pertenece al segmento BC y B_1 no está en el segmento CA, C_1 se hallará dentro del segmento AB. Pero, como puede tomarse en el plano ABC una recta d que corte á BC, CA y AB en puntos A'_1, B'_1 y C'_1, respectivamente, exteriores á los segmentos correspondientes BC, CA y AB, una vez fijada la recta d podemos enunciar el teorema diciendo que los puntos A y B están separados por los C_1 y C'_1 si no lo están los B y C por los A' y A'_1, ni los C y A por los B' y B'_1.

Así entendido, el teorema puede traspasar los límites primitivos y alcanza significación análoga al 10.° del § **2**, siempre que se trate de figuras de un plano. Esto resalta más claramente empleando la siguiente denominación: Si A, B, C y D son puntos de una recta, los A y B están separados por los C y D, y d es una recta distinta de la AB, que pasa por D, se dirá que el punto D está entre los A y B, por exclusión de la recta d, ó con relación á la recta límite d.

49. Si se da en un plano la «recta límite», con esto queda determinado el «punto límite» de cualquiera otra recta del mismo. Los teoremas *b*) á *f*) del § **1** son también aplicables á puntos cualesquiera de una recta del plano (excepto la d), cuando se substituye el punto E por la recta d; y á ellos se agrega, como se ha indicado, el siguiente:

1.° *Si los puntos* A, B *y* C *y la recta* d *están en un plano, el cual queda determinado por los tres puntos, y las rectas de unión* BC, CA *y* AB *son cortadas por otra recta en puntos* A_1, B_1 *y* C_1, *respectivamente, tales que, respecto de la recta límite* d, *el punto* A_1 *esté entre los* B *y* C, *pero el* B_1 *no esté entre los* C *y* A, *el* C_1 *estará entre los* A *y* B, *respecto de la recta límite* d.

Íntimamente ligado con este teorema, existe el siguiente en la radiación de rectas:

2.° *Si* a, b, *y* c *son rayos de una radiación de rectas no situados en un plano,* D *es un plano que pasa por el vértice de la radiación, y los planos* bc, ca *y* ab *son cortados por otro, que también contiene el vértice, en las rectas* a_1, b_1 *y* c_1, *respectivamente, tales que, respecto del plano límite* D, *el rayo* a_1 *esté entre los* b *y* c_1, *pero el* b_1 *no esté entre los* c *y* a, *el* c *estará entre los* a *y* b, *respecto del plano límite* D.

Otra vez se ha hecho uso aquí de una nueva expresión, á saber: si a, b, c y d son rectas de un plano, pertenecientes á un haz, tales que las a y b están separadas por las c y d, y D es un segundo plano que pasa por d, se dice que el rayo c está entre los a y b, respecto del plano límite D.

50. Los dos teoremas se demuestran al mismo tiempo. Si las rectas BC, CA y AB son cortadas por la d en los puntos A_2, B_2 y C_2, respectivamente, y los planos bc, ca y ab son cortados por el D en las rectas a_2, b_2 y c_2, la hipótesis hecha

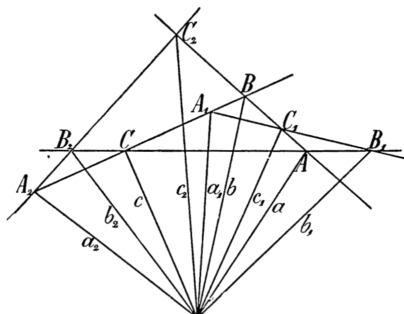


Fig. 31.

en el teorema 1.° es que B y C están separados por A_1 y A_2, y no lo están C y A por B_1 y B_2, y se debe probar que A y B están separados por C_1 y C_2; y en el teorema 2.° se supone que b y c están separadas por a_1 y a_2, y no lo están c y a por b_1 y b_2, y hay que demostrar que a y b están separadas por c_1 y c_2.

El primer teorema ha sido ya demostrado en el caso de ser propios los puntos A, B y C y no pasar la recta d entre B y C, ni entre C y A. Para demostrar el segundo teorema, tratándose de una radiación de vértice propio, tomemos en los rayos a, b y c tres puntos propios A, B y C (que, por tanto, no estarán en línea recta) del mismo lado del plano D. En tal caso, los puntos B y C estarán al mismo lado del rayo a_2, los puntos C y A al mismo lado del rayo b_2 y los puntos A y B

al mismo lado del rayo c_2. Ahora bien; si las rectas BC, CA y AB encuentran á las a_1, b_1 y c_1 en A_1, B_1 y C_1, y á las a_2, b_2 y c_2 en A_2, B_2 y C_2, respectivamente, los puntos A_1, B_1 y C_1, así como los A_2, B_2 y C_2, estarán en línea recta, pero sin estar A_2 en el segmento BC, ni B_2 en el CA, ni C_2 en el AB. Consecuencia de la hipótesis hecha es que b y c están separadas por a_1 y a_2, pero no lo están c y a por b_1 y b_2, luego también lo están B y C por A_1 y A_2, pero no C y A por B_1 y B_2. De aquí resulta, finalmente, que A y B están separados por C_1 y C_2, y, por consiguiente, a y b por c_1 y c_2.

Ahora podemos demostrar ya, con toda generalidad, el teorema 1.° Para ello, se toma un punto propio fuera del plano ABC, y se une con los puntos A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 por medio de las rectas a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2, respectivamente; en tal caso, las a, b y c no pertenecen á un haz; las a_1, b_1 y c_1, por el contrario, están en un plano, y lo mismo ocurre á las a_2, b_2 y c_2, á las b, c, a_1 y a_2, á las c, d, b_1 y b_2, y á las a, b, c_1 y c_2; es decir, que los planos bc, cd y ab son cortados por dos planos que pasan por el vértice de la radiación ab en las rectas a_1 y a_2, b_1 y b_2 y c_1 y c_2, respectivamente. Puesto que los puntos B y C están separados por los A_1 y A_2, pero no lo están los C y A por los B_1 y B_2, lo estarán las rectas b y c por las a_1 y a_2, pero no las c y a por las b_1 y b_2; de donde se sigue que las a y b están separadas por las c_1 y c_2 y, por consiguiente, también los puntos A y B están separados por los C_1 y C_2.

Por último, para demostrar el teorema 2.° con toda generalidad, se cortan las rectas a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 por un plano que no contenga el vértice de la radiación; si A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 son los puntos así obtenidos, resulta que los A, B y C no están en línea recta; lo contrario ocurre á los A_1, B_1 y C_1, á los A_2 B_2 y C_2, á los B, C, A_1 y A_2, á los C, A, B_1 y B_2 y á los A, B, C_1 y C_2. Se deduce en seguida que B y C están separados por A_1 y A_2, pero no lo están C y A por B_1 y B_2; luego lo estarán A y B por C_1 y C_2 y, por consecuencia, a y b por c_1 y c_2.

51. Para determinar el punto «que excluye» en cada serie rectilínea de un plano, hemos hecho uso de una recta que no es base de ninguna de dichas series. Del mismo modo en la radiación se ha utilizado un plano para determinar el rayo

«que excluye» en cada haz de rectas, cuyo plano es distinto de aquél. Puede, asimismo, tomarse un punto para determinar el rayo «que excluye» en cada haz de un plano (cuyo vértice es distinto de dicho punto). En tal caso, si *a*, *b*, *c* y *d* son rayos de un haz, tales que los *a* y *b* están separados por los *c* y *d*, y *M* es un punto del rayo *d* (distinto del vértice), diremos que el rayo *c* está entre los *a* y *b* respecto del punto límite *M*. Finalmente, para determinar en cada haz de planos de una radiación el «plano que excluye», se hace uso de una recta distinta de la arista. Entonces, si *A*, *B*, *C* y *D* son planos de un haz, tales que los *A* y *B* están separados por los *C* y *D*, y *s* es una recta del plano *D*, distinta de la arista, diremos que el plano *C* está entre los *A* y *B* respecto de la recta límite *s*.

Con esto se puede substituir ahora la recta *k* por el plano *H* ó por el punto *M* en los teoremas del § **3**, y el plano *T* por la recta *s* en los del § **4**.

Admitidas las definiciones anteriores, se presentan dos nuevos teoremas.

3.° *Si* D *es un punto de un plano que contiene tres rectas* a, b *y* c, *no pertenecientes á un haz, y los puntos* bc, ca *y* ab *unidos con otro del mismo plano dan las rectas* a_1, b_1 *y* c_1, *respectivamente, tales que, respecto del punto límite* D, *la recta* a_1 *esté entre las* b *y* c, *pero la* b_1 *no esté entre las* c *y* a, *la* c_1 *estará entre las* a *y* b, *respecto del mismo punto límite* D.

4.° *Si* d *es una recta que pasa por el vértice de una radiación á la cual pertenecen tres planos* A, B *y* C, *que no forman parte de un haz, y las rectas* BC, CA *y* AB *determinan con otra de la misma radiación planos* A_1, B_1 *y* C_1, *respectivamente, tales que, respecto de la recta límite* d, *el plano* A_1 *esté entre los* B *y* C, *pero el* B_1 *no esté entre los* C *y* A, *el* C_1 *estará entre los* A *y* B *respecto de la misma recta límite* d.

También estos dos teoremas se demuestran el uno por medio del otro. Designemos por A', B' y C' los puntos bc, ca y ab; por a_2, b_2 y c_2 las rectas $A'D$, $B'D$ y $C'D$; por a', b' y c' las rectas BC, CA y AB, y por A_2, B_2 y C_2 los planos $a'd$, $b'd$ y $c'd$. Con estas notaciones, en el teorema 3.° se supone que b y c están separadas por a_1 y a_2, pero sin que lo estén c y a por b_1 y b_2, y hay que probar que a y b están separadas por c_1 y c_2; y en el 4.°, la hipótesis es que B y C están separa-

dos por A_1 y A_2, pero sin que C y A lo estén por B_1 y B_2, y la tesis que A y B están separados por C_1 y C_2.

Demostraremos, en primer lugar, el teorema 3.°, para el caso en que los puntos A', B' y C' son propios y las rectas a_2 y b_2 pasan, respectivamente, entre B' y C' y C' y A'. Entonces, D es un punto propio situado entre A' y $a a_2$, B' y $b b_2$ y C'

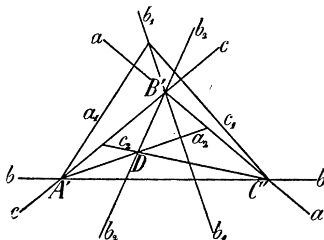


Fig. 32.

y $c c_2$; si, pues, b y b_1 se cortan en X, este punto pertenece al segmento $C'A'$ y la recta a_1 no pasa entre B' y X; luego tampoco la c_1 pasa entre B' y X, es decir, a y b están separadas por c_1 y c_2.

Este resultado se utiliza para demostrar el teorema 4.° en las radiaciones de vértice propio. Supongamos que se trata de una radiación de está naturaleza y tomemos un punto propio arbitrario C' en el rayo c', y los puntos, también propios, A' y B', en los rayos a' y b', respectivamente, de manera que el plano B_2 pase entre C' y A' y el plano A_2 pase entre B' y C', en cuyo caso los puntos A', B' y C' no estarán en línea recta. Si a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 son las rectas en que el plano $A'B'C'$ corta, respectivamente, á los A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2, resulta que las rectas b, c, a_1 y a_2 se encuentran en A'; las c, a, b_1 y b_2 en B'; las a, b, c_1 y c_2 en C', y también pertenecen á un haz las a_1, b_1 y c_1 y á otro las a_2, b_2 y c_2; además, las b y c están separadas por las a_1 y a_2, pero no lo están las c y a por las b_1 y b_2; y, por último, B' y C' están á distintos lados de a_2 y C' y A' á distintos lados de b_2. De aquí se deduce, aplicando lo dicho anteriormente, que las rectas a

y b están separadas por las c_1 y c_2, luego los planos A y B están separados por los C_1 y C_2.

La demostración general del teorema 3.° se obtiene ahora uniendo los puntos A', B' y C' (en este caso, cualesquiera), con un punto propio, exterior al plano $A'B'C'$, por medio de las rectas a', b' y c', y considerando los planos A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 que las rectas a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2 determinan con el punto tomado. Estos planos son tales que los B, C, A_1 y A_2 pasan por a'; los C, A, B_1 y B_2 pasan por b'; los A, B, C_1 y C_2 pasan por c', y también los A_1, B_1 y C_1 pertenecen á un haz y los A_2, B_2 y C_2 á otro. Resulta, entonces, que los planos B y C están separados por los A_1 y A_2, pero no lo están los C y A por los B_1 y B_2, luego los A y B están separados por los C_1 y C_2, y, por consiguiente, también lo están las rectas a y b por las c_1 y c_2.

Finalmente, la demostración general del teorema 4.° se obtiene cortando los planos A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 y C_2 por uno cualquiera que no pase por el vértice de la radiación que los contiene, y aplicando á la figura resultante el teorema 3.°; si se designan las rectas de intersección por a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 y c_2, respectivamente, las a y b estarán separadas por las c_1 y c_2, luego también lo estarán los planos A y B por los C_1 y C_2.

52. Así como los teoremas 1.° y 3.° tratan exclusivamente de figuras planas, el 2.° y el 4.° se refieren á figuras de una especial naturaleza, en las que sólo intervienen rectas y planos que pasan por el mismo punto; tales figuras, compuestas de rayos de dos radiaciones, una de rectas y otra de planos, del mismo vértice (centro) serán designadas con el nombre de figuras radiadas (*).

Con lo dicho hasta aquí en el presente artículo, está aún incompleta la serie de conceptos que debe contener, pues sólo se ha hablado de figuras planas situadas en el mismo plano y de figuras radiadas con el vértice común. Falta ahora establecer un convenio, por el cual quede determinada la recta límite en cada plano y, como consecuencia, el «punto que excluye» en cada recta. Esto se realiza mediante la consideración de un plano cualquiera N; entonces, si A, B, C y D son

(*) STAUDT: *Geometrie der Lage*, 1847. Prólogo.—*(N. A.)*

puntos de una recta exterior al plano *N*, los *A* y *B* están separados por los *C* y *D*, y el *D* es el punto de intersección de la recta con el plano, diremos que «el punto *C* está entre los *A* y *B*, respecto del plano límite *N*». Análogamente se procede para los haces de rectas ó planos. Si *a*, *b*, *c* y *d* son rayos de un haz de rectas, de los cuales los *a* y *b* están separados por los *c* y *d*, *n* es una recta que no pasa por el vértice (*) y *d* el rayo del haz que corta á *n*, diremos que «el rayo *c* está entre los *a* y *b*, respecto del rayo límite *n*». Si *A*, *B*, *C* y *D* son planos de un haz, de los cuales los *A* y *B* están separados por los *C* y *D*, *N* un punto exterior á la arista y *D* el plano del haz que pasa por él, diremos que «el plano *C* está entre los *A* y *B*, respecto del punto límite *N*». Con esto, podemos ahora substituir en los teoremas del § **1**, en lugar del punto *E*, el plano *N*; en los del § **3**, en lugar del rayo límite *k*, la recta *n*, y en los del § **4**, en lugar del plano límite *T*, el punto *N*; y con estas substituciones, los cuatro teoremas demostrados en este artículo toman la siguiente forma:

a) *Si* A, B *y* C *son puntos que no están en línea recta, y las rectas* BC, CA *y* AB *que los unen de dos en dos cortan á otra recta en puntos* A_1, B_1 *y* C_1, *respectivamente, tales que, respecto del plano límite* N, *el punto* A_1 *esté entre los* B *y* C, *y el* B_1 *no esté entre los* C *y* A, *el* C_1 *estará entre los* A *y* B, *respecto del plano límite* N.

b) *Si* a, b *y* c *son rectas de una radiación que no pertenecen á un haz, y los planos* bc, ca *y* ab *son cortados por uno que pasa por el vértice en rectas* a_1, b_1 *y* c_1, *respectivamente, tales que, respecto del rayo límite* n, *la recta* a_1 *esté entre las* b *y* c *y la* b_1 *no esté entre las* c *y* a, *la* c_1 *estará entre las* a *y* b *respecto del rayo límite* n.

c) *Si* a, b *y* c *son rectas de un plano que no pertenecen á un haz, y los puntos* bc, ca *y* ab, *unidos con otro del mismo plano, dan rectas* a_1, b_1 *y* c_1, *respectivamente, tales que, respecto del rayo límite* n, *la recta* a_1 *esté entre las* b *y* c, *pero la* b_1 *no esté entre las* c *y* a, *la* c_1 *estará entre las* a *y* b, *respecto del rayo límite* n.

d) *Si* A, B *y* C *son planos que no pertenecen á un haz, y las*

(*) Exterior, además, al plano del haz.—*(N. A.)*

rectas BC, CA *y* AB *determinan con otra planos* A_1, B_1 *y* C_1, *respectivamente, tales que, respecto del punto límite* N, *el plano* A_1 *esté entre los* B *y* C, *pero el* B_1 *no esté entre los* C *y* A, *el* C_1 *estará entre los* A *y* B, *respecto del punto límite* N.

53. La aplicación de los teoremas 6.° á 9.° y 12.° del § **1** y del 10.° del § **2** al caso de puntos cualesquiera que no están obligados á pertenecer á una recta, ni á un plano, se realiza ahora, en cuanto tal paso es posible, aunque, indudablemente, no de modo tan sencillo como en los otros teoremas fundamentales, pues, en lugar del concepto expresado por la palabra «entre», relativo á puntos propios, el cual era siempre aplicable á tres puntos de una recta, se ha necesitado idear uno relativo á puntos cualesquiera, el cual no es aplicable, sin más, á tres puntos de una recta, sino que supone haber fijado previamente un plano N. Del nuevo concepto pueden derivarse otros que corresponden exactamente á los deducidos en los artículos primero, tercero y cuarto; pero, con una sola excepción, aún contienen, en realidad, el plano N. La excepción es la siguiente: Si A, B, C y D son puntos de una recta, y el C está entre los A y B, respecto del plano límite N, pero no lo está el D, ó recíprocamente, esta relación es independiente del plano N: los puntos A y B están separados por los C y D. La consideración de cuatro puntos de una recta y un plano no ha dado lugar, pues, á la formación de nuevo concepto, y otro tanto ocurre en los haces de rectas ó de planos.

La tendencia á comprender desde un mismo punto de vista el mayor número posible de figuras, cuyos puntos de contacto permitan tratarlas con procedimiento uniforme, deja cada vez más relegada al último término la significación «propia» de las denominaciones geométricas elementales. Ha sido necesario aplicar constantemente aquellas denominaciones en el sentido más general que (hasta ahora) se les ha podido dar, salvo cuando condiciones particulares han exigido limitar el concepto á su sentido «propio». Según esto, cuando se pretende hallar una figura cuyas relaciones con otra dada están señaladas de antemano, se trata la cuestión en sentido general, y se busca una construcción de la figura desconocida que, con un procedimiento único, pueda ser aplicada en todos los casos posibles; y sólo en los resultados se toman en consi-

deración las condiciones que puedan imponer alguna restricción.

El mismo procedimiento sigue el Análisis, cuando de números dados trata de obtener otros con ellos ligados por relaciones previamente señaladas; en él se ve cómo todas las soluciones están subordinadas al concepto más general de número, sin tener en cuenta para nada la índole del problema, que, muy frecuentemente, exige una especial naturaleza de los números que lo resuelven.

Adición al § 9.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1897, tomo XLVIII, pág. 111.)

Sean A, B y C tres puntos no situados en línea recta, A_1 un punto de la recta BC, distinto de los B y C, y B_1 uno de la CA, distinto de los C y A. Si se toman en las rectas BC y CA puntos A_2 y B_2 de modo que B y C estén separados por A_1 y A_2, y que C y A lo estén por B_1 y B_2 (§ **7**, antepenúltimo teorema) y se traza por A_2B_2 un plano N, distinto del ABC, respecto del plano límite N el punto A_1 está entre los B y C, y el B_1 está entre los C y A.

Sean, ahora, A, B, C y D puntos de un plano, de los cuales no haya tres en línea recta; sean, además, A_1, B_1 y C_1 los puntos de intersección de las rectas BC y AD, CA y BD, y AB y CD, diferentes, por tanto, de A, B, C y D. Si ahora se elige el plano N como se ha indicado antes, del teorema 14.° del § **2** (Adición al § **2**), se deduce que C_1 está entre A y B, respecto del plano límite N. Pues en el § **9** se ha establecido, que en todas las figuras, siempre que se presentan tres puntos propios de una recta y se diga de uno de ellos que está ó no entre los otros dos, si se añade la frase «respecto del plano límite N» se pueden substituir todos los elementos propios de la figura por otros cualesquiera.

Del mismo modo se puede generalizar el teorema 11.° del § **2**. Resultan, así, los siguientes teoremas:

a) Si los puntos A, B, C *y* D *están en un plano, sin que tres de ellos estén en línea recta, y las rectas* BC, CA *y* AB *son encontradas por las* AD, BD *y* CD *en* A_1, B_1 *y* C_1, *se puede elegir*

el plano N *de tal modo que el punto* A_1 *esté entre los* B *y* C, *el* B_1 *esté entre los* C *y* A *y el* C_1 *esté entre los* A *y* B, *respecto del plano límite* N.

b) Si A, B *y* C *son tres puntos dados, que no están en línea recta y, respecto de un plano límite* N, *el punto* A_1 *está en la recta* BC *entre* B *y* C, *el punto* B_1 *está en* CA *entre* C *y* A, *y el punto* C_1 *está en* AB *entre* A *y* B, *los puntos* A_1, B_1 *y* C_1 *no están en línea recta.*

§ 10.—Figuras perspectivas

54. En los artículos anteriores se han establecido repetidamente relaciones entre figuras planas y figuras radiadas para demostrar propiedades de unas y otras. Los puntos y rectas de una figura plana han sido unidos con un punto exterior á su plano, dando lugar á rectas y planos, respectivamente, con lo cual queda realizado el paso de una figura plana á una radiada íntimamente ligada con la primera. Un plano que no contenga el vértice de una figura radiada corta á las rectas y planos de ésta en puntos y rectas, respectivamente, con lo cual se logra el paso recíproco del anterior. Las figuras que tienen tal posición relativa se llaman perspectivas, y la figura plana se dice que es una sección de la radiada (*).

Sean A, B ..... los puntos y a, b ..... las rectas de una figura plana; a', b' ..... las rectas y A', B' ..... los planos de una figura radiada cuyo vértice no pertenezca á la figura plana; supongamos que el número de los puntos A, B ..... sea igual al de las rectas a', b' .....; el de las rectas a, b ....., igual al de los planos A', B' .....; y, por último, que el punto A esté en a', el B en b', el C en c' .....; la recta a en A', la b en B' ..... En tal caso, las figuras AB ..... ab ..... y $a'b'$ ..... $A'B'$ ..... son perspectivas, los elementos A y a', B y b' ....., a y A', b y B' ..... reciben el nombre de homólogos, y las figuras se

(*) La figura radiada recibe el nombre de proyectante de la plana.—*(N. T.)*

enuncian de tal modo que cada par de elementos homólogos ocupen los mismos lugares en las series respectivas. De cada elemento de la figura plana puede decirse que está en su homólogo, y de cada elemento de la figura radiada, que pasa por su homólogo. Para dar un modo de expresión uniforme, diremos también que un punto se apoya (*) en una recta y la recta se apoya en el punto cuando éste pertenezca á aquélla, y usaremos también estas expresiones para los puntos y planos, ó rectas y planos de posición análoga. En general, pues, se dirá que cada dos elementos homólogos de las dos figuras perspectivas se apoyan uno en otro (**), y la propiedad característica de las dos figuras podrá entonces expresarse diciendo: *Si dos elementos de una figura se apoyan uno en otro, la misma posición relativa tendrán los elementos homólogos en la otra.*

55. Si en el plano de una figura plana se toma un punto cualquiera, M, ó pertenece á la figura ó puede ser agregado á ella; en todo caso determina con el vértice de la figura radiada un rayo m', que, cuando se consideran las dos figuras perspectivas, recibe el nombre de rayo homólogo del punto M. En general, á cada uno de los elementos que amplían una de las figuras corresponde un elemento «homólogo» que amplía la otra. *Siempre, pues, que varios puntos de la figura plana estén en una recta, los rayos homólogos pertenecerán á un haz, y recíprocamente; y siempre que varias rectas de la figura plana pasen por un punto, los planos homólogos pasarán por una rec-*

(*) Hemos traducido así la expresión «liegt **an**» empleada por el autor, creyendo que no tiene más exacta correspondencia para este caso en castellano. Parece, sin embargo, preferible adoptar el nombre de elementos incidentes, hoy ya bastante usado (véase, por ejemplo, Reye, *Geometrie der Lage*, 5.ª ed., tomo I, pág. 25, y Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften*, tomo I, pág. 33, 1908), y así lo haremos en lo sucesivo.—*(N. T.)*

(**) Tales elementos son llamados incidentes, siguiendo á Grassmann: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1856, tomo LII, pág. 255; *Die Ausdehnungslehre*, 1862, núm. 15 *(Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, tomo II, Primera parte, 1904, página 220; tomo I, Segunda parte, 1896, pág. 16). Véase Sturm: *Mathematische Annalen*, 1877, tomo XII, pág. 258; Schubert: loc. cit., página 191.

También se llaman incidentes dos rectas que se encuentran.— *(N. A.)*

ta, y recíprocamente. Por consiguiente, al punto de intersección de dos rectas de la figura plana corresponde la recta de intersección de los planos homólogos, y á la recta de unión de dos puntos de la figura plana el plano que pasa por los rayos homólogos.

A cada parte de la figura plana corresponde una parte homóloga de la figura radiada perspectiva; estas partes están también en posición perspectiva. Así, por ejemplo, á una serie rectilínea corresponde un haz de rectas, de tal modo que constituyen figuras perspectivas en un plano; y si en una de estas figuras dos pares de elementos están separados uno por otro, la misma relación guardan los pares homólogos. Un haz de rectas y una serie rectilínea son perspectivas si la serie es una sección del haz.—A un haz de rectas, como figura plana, corresponde un haz de planos, como figura radiada perspectiva; el vértice del primero está en la arista del último y es, por consiguiente, vértice de una figura radiada que se compone del haz de rectas y del haz de planos. A pares separados de un haz corresponden, como antes, pares separados en el otro.— Finalmente, se llaman también perspectivos una serie rectilínea y un haz de planos cuando las dos figuras son perspectivas de un haz de rectas (por consiguiente, no sólo de uno). También aquí cada dos elementos homólogos son incidentes, la serie puede llamarse sección del haz (*), y la posición relativa de dos pares de elementos de una figura es siempre la misma que la de los pares homólogos de la otra.

La serie rectilínea se cuenta entre las figuras planas, el haz de planos entre las radiadas y el haz de rectas en unas y otras. Podemos, pues, decir, comprendiendo en un solo enunciado los distintos casos, que: *Siempre que en una figura plana dos pares de elementos están separados uno por otro, los pares homólogos de toda figura radiada perspectiva de aquélla están también separados uno por otro, y recíprocamente* (**).

Una serie rectilínea y un haz de rectas perspectivos pueden aparecer como partes de una figura plana; entonces, en toda

(*) Al haz se le llama proyectante de la serie, desde su arista.—*(N. T.)*

(**) En esto está incluído el caso de dos haces de rectas perspectivos de que más adelante se hablará.—*(N. T.)*

figura radiada perspectiva de ésta las partes homólogas son también perspectivas. Un haz de rectas y un haz de planos perspectivos pueden aparecer como partes de una figura radiada; en tal caso, las partes homólogas en cada figura plana perspectiva de ésta son, asimismo, perspectivas entre sí.

56. En ningún sitio de este artículo hemos hablado de elementos propios (puntos, rectas, planos) y, por tanto, no se ha aplicado ningún concepto geométrico que únicamente á tales elementos se refiera. Se han presentado las expresiones punto, recta y plano sólo en su acepción general, así como el concepto de elementos incidentes y el de la posición separada de dos pares de elementos (aparte los conceptos que pueden derivarse de aquéllos sin admisión de otros). De estos conceptos se dice que se refieren á la **posición.** Necesitaban ciertamente ser introducidos como derivados frente á los conceptos geométricos fundamentales; pero si se parte de ellos, sin admisión de otros ulteriores (de ellos se dirá, asimismo, que también se refieren á la posición), pueden aquéllos considerarse como conceptos primitivos dentro del grupo de los que se refieren á la posición. Los teoremas de Geometría que no contienen ningún otro concepto geométrico se consideran como una parte especial de la Geometría que se llama Geometría de la posición. A esta rama de la Geometría pertenecen los cuatro últimos teoremas del § **7**, los 1.°, 2.°, 4.°, 5.° y 7.° á 5.° del § **8**, todos los resultados expuestos en el § **9**, excepto el 1.er teorema (**47**), y todos los teoremas del § **10**. El punto, la recta y el plano (en la acepción general), el ser incidentes dos elementos y el estar separados pares de elementos, desempeñan en la Geometría de la posición el papel de conceptos primitivos, á los cuales deben referirse todos los demás.

Las relaciones entre los elementos de una figura, para cuya enunciación sólo son precisos conceptos relativos á la posición, constituyen sus propiedades relativas á la posición, y se llaman propiedades gráficas ó descriptivas (*). La Geometría de la posición es, según esto, la teoría de las

(*) Y también proyectivas por la razón que se verá más adelante (**124**). En España, lo corriente es usar las denominaciones de proyectivas ó descriptivas.—*(N. T.)*

propiedades gráficas de las figuras, y enseña á deducir propiedades gráficas de una figura de otras conocidas de la misma naturaleza. Todo teorema en cuya demostración se aplican únicamente teorías y conceptos que sólo se refieren á la posición, puede expresar á su vez sólo una relación entre propiedades gráficas; tales son, por ejemplo, todas las consecuencias de los teoremas antes citados. Pero la recíproca no es cierta; los teoremas expuestos hasta aquí, que pertenecen á la Geometría de la posición, necesitan deducirse en gran parte de teoremas de otra naturaleza, cuestión sobre la que más adelante volveremos.

También la posición perspectiva de dos figuras es una propiedad gráfica del sistema. Por esto, todas las observaciones hechas hasta aquí sobre figuras perspectivas, pueden ser compendiadas así: *Si una figura plana está en posición perspectiva con una figura radiada, toda propiedad gráfica de elementos de una de las figuras, lo es también de los elementos homólogos de la otra* (*). Y de aquí se sigue el importante principio siguiente, que liga estrechamente la teoría de las figuras planas (Planimetría) con la de las radiadas, en todo lo que se refiere únicamente á la posición:

Todo teorema que trate de propiedades gráficas de una figura plana, puede ser aplicado á las figuras radiadas, substituyendo los puntos y rectas de la figura plana por rectas y planos, respectivamente, de las radiadas.

Este principio enseña que siempre que en una figura plana se hayan supuesto ciertas propiedades gráficas para deducir otras de la misma naturaleza, puede asegurarse que existen, y quedan así demostradas, las propiedades correspondientes en la radiación. Pues si se toma una figura radiada con las propiedades que corresponden á la hipótesis del teorema de planimetría, y se pasa á una figura plana perspectiva con ella, en ésta se verificarán las propiedades análogas y, por

(*) Algunas de estas propiedades gráficas se definen sin intervención de elementos auxiliares; por ejemplo, la posición armónica de que se trata en el § **11**. Á tales propiedades puede ser referido el teorema anterior (y las consecuencias que de él se deducen) únicamente en tanto que los elementos auxiliares pertenecen al plano de la figura ó pasan por el vértice de la radiación, respectivamente.

tanto, la tesis del teorema de planimetría; luego la figura radiada posee las propiedades correspondientes á dicha tesis. Con igual razón se admitirán, sin demostrarlos particularmente, los teoremas de planimetría que se refieran á propiedades gráficas, deducidos de los análogos de las figuras radiadas. Con esto queda expresada la ley que relaciona los teoremas 1.° y 2.° y 3.° y 4.° del capítulo anterior. Aún puede añadirse que: *Toda propiedad gráfica demostrada para una serie de puntos, un haz de rectas ó un haz de planos, es aplicable también á las otras dos figuras.*

57. Consideremos ahora dos secciones planas de la misma figura radiada, por consiguiente, dos figuras perspectivas con una radiada, situadas en distintos planos (P y P'), á las que también llamaremos perspectivas. Cada dos elementos, puntos ó rectas, que estén en el mismo elemento de la figura radiada se llaman homólogos; cada dos rectas homólogas están en un plano y, por consiguiente, tienen un punto común (situado en la recta PP'). La recta PP' es homóloga de sí misma, y lo mismo les ocurre á sus puntos; á estos elementos se les llama correspondientes comunes (*). Las rectas de unión de los puntos homólogos, así como los planos de cada par de rectas homólogos, pasan por un punto O, el centro de la perspectividad ó centro perspectivo. De los elementos de una de las figuras, la contenida en P, por ejemplo, se dice también que se proyectan desde el punto O sobre el otro plano P en sus homólogos. Se dice, pues, que se proyectan sobre el plano P' (plano de proyección), desde el punto O (centro de proyección), el punto A en A' (su proyección) y la recta a en a' (su proyección), cuando la recta OA y el plano Oa (que se llaman proyectantes) cortan al plano P' en el punto A' y la recta a', respectivamente.

Cada recta tiene un punto común con su proyección. La recta que une dos puntos se proyecta en la que une sus homólogos, y el punto de intersección de dos rectas se proyecta

(*) Suele llamárseles también *dobles* y de *coincidencia;* nosotros usaremos preferentemente esta última denominación para evitar las confusiones que, de otro modo, se presentarían al tratar de correspondencias multiunívocas.—*(N. T.)*

en el de las rectas homólogas. Cada una de dos figuras planas perspectivas situadas en distintos planos es, según esto, proyección de la otra; las rectas y los planos proyectantes forman una figura radiada (la figura proyectante), perspectiva con cada una de las planas. Cada recta de una figura plana encuentra á la de intersección de los dos planos en el mismo punto que su proyección.

Las figuras perspectivas situadas en distintos planos tienen todas sus propiedades gráficas comunes; porque de las de una cualquiera de ellos se pasa á las de la otra por medio de la figura proyectante. Dicho de otro modo: *Las propiedades gráficas de una figura plana no cambian al proyectarla sobre otro plano.*

58. La serie rectilínea es una figura plana especial, que está en un plano con cada una de las figuras planas perspectivas con ella. Cada dos series rectilíneas perspectivas suponen la existencia de dos rectas (bases) en un plano, y el punto de intersección de sus bases es de coincidencia. Dentro de un plano, el punto A se proyecta desde el O sobre una recta en el A', cuando esta recta encuentra al rayo OA en el punto A'; cada serie rectilínea se proyecta en una serie perspectiva con ella. Las rectas de unión de puntos homólogos de dos series perspectivas concurren en el centro de proyección.

El haz de rectas es, asimismo, una figura plana especial; pero al tratar de su proyección sobre otro plano, hay que distinguir dos casos. Si el vértice está situado en el plano de proyección y, por consiguiente, es homólogo de sí mismo, los dos haces perspectivos están en distintos planos, pero tienen el mismo vértice, y pueden ser considerados como pertenecientes á una misma figura radiada; estos haces tienen un rayo de coincidencia, la recta de intersección de sus planos. Si el vértice es distinto de su proyección, los dos haces perspectivos tienen distinto vértice y están en distintos planos; los puntos de intersección de sus rayos homólogos forman, entonces, una serie rectilínea (sección perspectiva de los haces) (*) situada en la intersección de los dos planos; los dos haces son, pues, perspectivos de una misma serie rectilínea.

(*) Á la base de esta serie suele llamársele eje perspectivo de los dos haces.—*(N. T.)*

Pero, en ambos casos, los dos haces son secciones de un haz de planos (haz de planos proyectantes) por planos que pasan por el mismo ó por distintos puntos de su arista.

59. Correspondiendo con lo que ocurre en las figuras planas perspectivas, existen también figuras radiadas perspectivas. Cada dos figuras radiadas con distintos vértices O y O', que tienen común una sección plana y, por tanto, son perspectivas de una misma figura plana, se llaman perspectivas. Cada dos rectas de ambas figuras que pasan por el mismo punto de la figura plana, y cada dos planos que pasan por la misma recta de esta figura, se llaman homólogos; cada dos rectas homólogas tienen común un punto y, por tanto, están en un plano que pasa por OO'. La recta OO' y todo plano que pasa por ella, es decir, todos los elementos comunes á las dos figuras radiadas, son de coincidencia. Al plano de dos rectas de una de las figuras corresponde el de las homólogas en la otra, y á la recta de intersección de dos planos de una corresponde la de intersección de los planos homólogos de la otra. Los puntos de intersección de las rectas homólogas y las rectas de intersección de los planos homólogos forman una figura plana perspectiva con ambas (la sección perspectiva de aquellas dos figuras) (*). *Las figuras radiadas de distinto vértice tienen comunes todas las propiedades gráficas.*

Como casos particulares citemos los haces de rectas y los de planos. Dos haces de rectas con distintos vértices O y O', considerados como figuras radiadas, son perspectivos cuando tienen una sección perspectiva, es decir, cuando los rayos homólogos se cortan, en cuyo caso los puntos de intersección están en línea recta (pues han de estar en un plano que no pase por O ni por O'). Un ejemplo de estos haces hemos encontrado ya: los haces perspectivos con distintos vértices y en distintos planos; éstos no contienen ningún rayo de coincidencia, y los planos de sus rayos homólogos forman un haz. Una nueva especie de haces perspectivos, se presenta ahora: los que tienen distinto vértice, pero están en el mismo plano. Tales haces pueden aparecer como parte de una figura plana, tienen el rayo OO' de coincidencia, y no existe haz de planos

(*) Al plano de esta figura suele llamársele plano central perspectivo de las dos figuras radiadas. *(N. T.)*

perspectivo de ambos. Hay, pues, según esto, tres especies de haces perspectivos.

La posición perspectiva de dos haces de planos supone que sus aristas se cortan y, por consiguiente, que ambos haces forman una figura radiada. El plano de las aristas es de coincidencia. La sección perspectiva es un haz de rectas en cuyo vértice se cortan las dos aristas. Los haces de planos perspectivos son, pues, perspectivos de un haz de rectas.

60. Partiendo de figuras planas perspectivas se llega á un gran número de teoremas sobre figuras planas del mismo ó de distintos planos. En este lugar nos limitamos á exponer los más fundamentales de estos teoremas. En las figuras radiadas existen otros análogos á ellos, que se enuncian fácilmente y no necesitan ser establecidos de un modo particular.

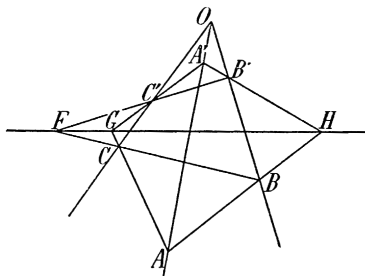


Fig. 33.

Designemos por ABC y $A'B'C'$ dos triángulos, por consiguiente, figuras planas en que, tanto A, B y C como A', B' y C', no están en línea recta; los puntos A, B y C determinan un plano P, y los A', B' y C' un plano P'. Siempre que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en un punto O, se dice que los triángulos son perspectivos, ya sea que los planos P y P' sean distintos ó no. Los lados opuestos á vértices homólogos son, entonces, homólogos; cada dos lados homólogos se cortan y los tres puntos de intersección así hallados están en una recta, lo cual se deduce de que están en los dos planos cuando éstos son distintos, y se demostrará en seguida en el

caso contrario. Recíprocamente: si los planos P y P' son distintos y los pares de lados BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ y AB y $A'B'$ se cortan (por consiguiente, los tres puntos de intersección están en una recta), los triángulos ABC y $A'B'C'$ son perspectivos. Pues las rectas AA', BB' y CC' están de dos en dos en un plano, sin estar todas en el mismo; luego concurren en un punto O. En general, si tres ó más rectas están de dos en dos en un plano, pero no están todas en el mismo, pasan por un punto, ó de otro modo: *si tres ó más rectas se cortan de dos en dos, forman una figura plana ó una figura radiada.* Las dos cosas ocurren al mismo tiempo cuando pertenecen á un haz.

Los triángulos perspectivos situados en un plano resultan de proyectar un triángulo desde puntos diferentes.—En efecto: si se proyecta el triángulo $A_1B_1C_1$ (que determina el plano Q) sobre otro plano P en ABC desde el punto V y en $A'B'C'$ desde V', los triángulos ABC y $A'B'C'$ son perspectivos, pues el punto O de intersección del plano P con la recta VV' está en AA' (por estar O, A y A' en los planos P y AVV'), y también en BB' y CC', debiendo observarse que la construcción supone que V' no está en ninguna de las rectas AV, BV y CV. Recíprocamente: si los triángulos ABC y $A'B'C'$ contenidos en un plano P son perspectivos, serán proyecciones de un triángulo de otro plano, pues si por el punto O, en que se cortan las rectas AA', BB' y CC', se traza una recta no situada en el plano P, y se toman en ella dos puntos V y V' arbitrarios (distintos del O), los puntos V' y A' están contenidos en el plano AOV, luego las rectas VA y $V'A'$ se cortan en un cierto punto A_1; del mismo modo, las rectas VB y $V'B'$ se cortan en B_1 y las VC y $V'C'$ en C_1, y los puntos A_1, B_1 y C_1 determinan un plano Q, distinto del P, y son vértices de un triángulo $A_1B_1C_1$, que es proyección sobre Q del ABC desde V y del $A'B'C'$ desde V'.

Los lados homólogos de dos triángulos perspectivos se cortan en puntos de una recta, ya estén los dos en un plano ó no (*).—Bastará demostrarlo para dos triángulos que estén en un plano. Estos triángulos son proyecciones de uno $A_1B_1C_1$ de otro plano. La recta de intersección de los dos planos encuentra á

(*) Esta propiedad, fundamental en Geometría de la posición, se conoce bajo el nombre de Teorema de Desargues.—*(N. T.)*

la B_1C_1 en el mismo punto F que á sus proyecciones BC y $B'C'$; análogamente corta á C_1A_1, CA y $C'A'$ en G y á A_1B_1, AB y $A'B'$ en H; luego BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ y AB y $A'B'$ se cortan en tres puntos F, G y H de una recta. Recíprocamente: *si en el mismo plano ó en planos distintos hay dos triángulos* ABC *y* A'B'C', *tales que los lados* BC *y* B'C', CA *y* C'A' *y* AB *y* A'B' *se corten en puntos* F, G *y* H *de una recta, los triángulos son perspectivos.* También aquí nos bastará demostrarlo para triángulos de un plano. Si se hace pasar un plano distinto de éste por la recta FG, y sobre él se proyecta el triángulo ABC en $A_1B_1C_1$, los lados B_1C_1, C_1A_1 y A_1B_1 pasarán, respectivamente, por F, G y H; luego B_1C_1 y $B'C'$ se cortan en F, C_1A_1 y $C'A'$ en G y A_1B_1 y $A'B'$ en H, y, por consiguiente, $A_1B_1C_1$ y $A'B'C'$ son triángulos perspectivos en distintos planos, y ABC y $A'B'C'$ proyecciones de ABC. (Otra demostración que en los dos casos reduce este teorema al anterior, y tiene la ventaja de que en el caso de estar los dos triángulos en un plano permite no salirse de él (*), se funda en la circunstancia de concurrir en H las rectas AB, $A'B'$ y GF, con lo cual los triángulos $AA'G$ y $BB'F$ son perspectivos, y sus lados $A'G$ y $B'F$, GA y FB y AA' y BB' se cortan en tres puntos C', C y O de una recta; luego AA', BB' y CC' tienen común el punto O.)

61. En las figuras planas compuestas de más de tres puntos hay una diferencia esencial en cuanto á la perspectividad, según que estén ó no en distintos planos. Consideremos cuatro puntos A, B, C y D en un plano; si se los une de dos en dos se obtienen seis rectas, y la figura compuesta de los puntos A, B, C y D y de las seis rectas de unión se llama cuadrivértice plano completo. Al cuadrivértice completo $ABCD$ pertenecen, pues, cuatro vértices A, B, C y D, y

(*) Conviene observar, sin embargo, que la demostración del teorema de Desargues no excluye por esto la necesidad de considerar elementos exteriores al plano de los dos triángulos. Hilbert ha demostrado la imposibilidad de esta demostración por medio de los postulados de la Geometría plana, exclusivamente, de donde resulta, cuando sólo se admiten éstos, una nueva Geometría, en que se prescinde del teorema de Desargues, llamada no-Desarguesiana. Véase Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, tercera edición, 1909, § **23**, y Schur, *Grundlagen der Geometrie*, 1909, § **2**.—*(N. T.)*

seis lados BC, CA, AB, AD, BD y CD; los BC y AD, los CA y BD y los AB y CD reciben el nombre de lados opuestos. Supongamos que en el mismo ó en distinto plano hay otro cuadrivértice completo $A'B'C'D'$, de tal modo colocado que las rectas AA', BB', CC' y DD' concurran en un punto O, y, además, que en ninguno de los dos cuadrivértices haya tres vértices en línea recta. La hipótesis hecha puede también formularse diciendo que tanto los triángulos ABC y $A'B'C'$, como los ABD y $A'B'D'$, deben ser perpectivos; por el punto O, en que se cortan AA' y BB' pasan, entonces, también CC' y DD' y, por consiguiente, tanto los triángulos BCD y $B'C'D'$, como los ACD y $A'C'D'$, son también perspectivos. Con esto queda establecida una correspondencia entre los vértices y, por consecuencia, entre los lados de los dos cuadrivértices, de tal naturaleza que cada dos lados correspondientes se cortan. Sean F el punto de intersección de BC y $B'C'$; G el de CA y $C'A'$; H el de AB y $A'B'$; F_1 el de AD y $A'D'$; G_1 el de BD y $B'D'$ y H_1 el de CD y $C'D'$. Los puntos F y F_1, G y G_1, H y H_1 están cada dos en lados opuestos del cuadrivértice $ABCD$ y del $A'B'C'D'$, y por los puntos de cada uno de los grupos F_1, G_1 y H_1; F_1, G y H; F, G_1 y H y F, G y H_1 pasan lados que concurren en un vértice. Si los dos cuadrivértices están en planos diferentes, los puntos F, F_1, G, G_1, H y H_1 (que no hace falta sean distintos) están contenidos en una recta. Pero esto no es necesario cuando los planos de ambas figuras se confunden; entonces podemos asegurar únicamente que los puntos de cada uno de los grupos F, G y H; F, G_1 y H_1; F_1, G y H_1 y F_1, G_1 y H están en línea recta y, por tanto, que F y F_1, G y G_1 y H y H_1 son los pares de vértices opuestos de un cuadrilátero completo, en el que un lado pasa por F, G y H. Un cuadrilátero completo (plano) es la figura compuesta por cuatro rectas de un plano (los lados) y sus seis puntos de intersección (los vértices).

La hipótesis que acabamos de hacer está satisfecha cuando tanto F, G y H, como F_1, G_1 y H están en línea recta; si esto ocurre serán, pues, también FG_1H_1 y F_1GH_1 series rectilíneas. Pero si aún añadimos la hipótesis de que las rectas que pasan por F, G y H y por F_1, G_1 y H coinciden, los seis puntos F, F_1, G, G_1, H y H_1 están todos en una recta, aun cuando los dos cuadrivértices pertenezcan á un plano; podemos, pues,

decir que: *Si los cuadrivértices completos* ABCD *y* A′B′C′D′ (en ninguno de los cuales hay tres vértices en línea recta) *están situados en el mismo ó en distintos planos, de tal modo que los pares de lados* BC *y* B′C′, CA *y* C′A′, AB *y* A′B′, AD *y* A′D′ *y* BD *y* B′D′ *se cortan en puntos* F, G, H, F_1 *y* G_1 *de una recta, los lados* CD *y* C′D′ *concurren en un punto* H_1 *de la misma*, no siendo preciso para que esto ocurra que sean distintos F y F_1, G y G_1 y H y H_1.

Si sobre una recta se dan cinco puntos F, F_1, G, G_1 y H (pudiendo coincidir F con F_1 y G con G_1), se pueden construir cuadrivértices completos tales, que cinco lados pasen por los puntos dados, siendo lados opuestos los que pasan por F y F_1 y por G y G_1, y no concurriendo en un vértice los que pasen

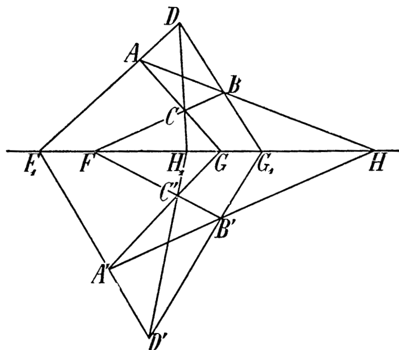


Fig. 34.

por F, G y H; el sexto lado encontrará siempre á la recta dada en un punto determinado H_1. En cada recta, cinco puntos F, F_1, G, G_1 y H determinan, pues, un sexto punto H_1, que puede hallarse por la siguiente construcción y es independiente de las líneas auxiliares utilizadas. Por F, G y H se trazan tres rectas que se cortan en A, B y C, siendo BC la que pasa por F, CA la que pasa por G y AB la que pasa por H; las rectas AF_1 y BG_1 se cortan entonces en un punto D, y la recta CD encuentra á la dada en H_1. En esta construcción

pueden permutarse los pares F y F_1 y G y G_1 entre sí, pero el cambio de F por F_1 sólo es realizable á condición de hacer al mismo tiempo el de G por G_1. En realidad, esta condición es innecesaria (**113**), y se puede construir el cuadrivértice $ABCD$, sin que por ello varíe H_1, de tal modo que los lados que pasen por F, G y H partan de un vértice; pero es imposible justificarlo con los medios auxiliares hasta aquí introducidos (*).

62. La figura en que coinciden F con F_1 y G con G_1 tiene una particular importancia. En tal caso, dos lados opuestos, BC y AD, se cortan en F; otros dos, también opuestos, CA y BD, se cortan en G, y de los dos restantes, AB y CD, uno pasa por H y otro por H_1. Si sobre una recta se dan tres puntos F, G y H, se pueden construir cuadrivértices completos tales que dos lados opuestos se corten en F, otros dos en G y un quinto lado pase por H; entonces, el sexto lado corta á la recta dada en un punto determinado H_1, diferente del H (**). Según esto, la siguiente construcción da un resultado independiente de las líneas auxiliares utilizadas. Se trazan por F, G y H tres rectas que se cortan en A, B y C, siendo BC la que pasa por A, CA la que pasa por G y AB la que pasa por H, y se determina el punto D, intersección de las rectas AF y BG, y en seguida el H_1, intersección de CD con la recta dada. En esta construcción pueden permutarse F y G. Aplicándola á los puntos F, G y H_1 se halla H del mismo modo que H_1 por medio de F, G y H.

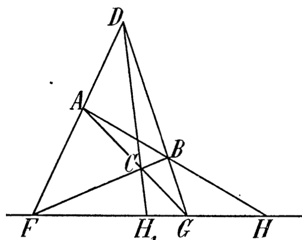


Fig. 35.

(*) Véase la primera adición al § **10**.—*(N. A.)*

(**) En la segunda adición al § **10** se demuestra que H_1 es diferente de H.—*(N. A.)*

Primera adición al § 10.

Diremos que seis puntos F, F_1, G, G_1, H y H_1, obtenidos de la manera indicada en el núm. **61**, forman un sistema I; cinco puntos del sistema, F, F_1, G, G_1 y H, determinan el sexto H_1. En el mismo lugar (**61**) se dijo que también los puntos F_1, F, G, G_1, H y H_1 forman un sistema I; se puede, pues, enunciar el siguiente

TEOREMA I.—*Si los puntos* F, F_1, G, G_1, H *y* H_1 *forman un sistema I, los* F_1, F, G, G_1, H *y* H_1 *forman un sistema de la misma naturaleza.*

En el lugar citado dijimos, además, que el teorema I no se puede deducir de los §§ **7**, **8** y **9**. Sobre tal afirmación haremos observar ahora lo que sigue:

Sean A, B_1 y B puntos de una recta, y G_1, F y F_1 puntos de otra recta, entre los cuales no figura el común á ambas, y designemos por C, D_1 y D los puntos de intersección de las rectas BF y B_1F_1, AF_1 y BG_1, y AF y B_1G_1, y por G, H, H_1 y H' los de intersección de la recta FG con las AC, AB, CD y CD_1. Como la recta FG corta á las BC, AD y BD en los puntos F, F_1 y G, respectivamente, los F, F_1, G, G_1, H y H_1 constituyen un sistema I, y otro, por consiguiente, los F_1, F, G, G_1, H y H_1 si el teorema I es cierto. Pero, análogamente, los puntos F_1, F, G, G_1 H y H' forman también un sistema I, pues son los puntos en que la recta FG es cortada por las B_1C, AD_1, AC, B_1D_1, AB_1 y CD_1. Por consiguiente, si el teorema I es cierto, H' coincide con H_1, CD_1 con CD y C, D y D_1 están en línea recta, y resulta el siguiente teorema (caso particular del teorema de Pascal):

TEOREMA P.—*Si* A, B *y* C *son tres puntos de una recta y* A′, B′ *y* C′ *tres puntos de otra que está en un plano con aquélla, pero ninguno de los seis puntos está en las dos rectas al mismo tiempo, las rectas* BC′ *y* CB′, CA′ *y* AC′, AB′ *y* BA′ *se cortan en tres puntos situados en línea recta.*

Si se parte de la figura 34, en la que los puntos F, F_1, G_1, G, H y H_1 forman un sistema I, y se consideran las intersecciones B_1 de AB con CF y D_1 de AF con B_1G_1, resulta, si se utiliza el teorema P, que C, D y D_1 están en línea recta, y de

aquí que F_1, F, G, G_1, H y H_1 forman un sistema I. Por consiguiente, *admitidas las proposiciones de los* §§ **7**, **8** *y* **9**, *de la admisión del teorema I se deduce la certeza del teorema P, y de la admisión de éste la certeza del* I. Pero las investigaciones de Hilbert en el capítulo VI de su *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, 1899 (2.ª edición, 1907, 3.ª ídem, 1909) han demostrado que el teorema P no se puede deducir de las proposiciones contenidas en nuestros artículos **7**, **8** y **9**. Podemos, pues, concluir que el teorêma I no puede ser demostrado únicamente con los medios auxiliares contenidos en el § **10**.

Segunda adición al § 10.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1897, tomo XLVIII, pág. 111.)

En la adición al § **9** se dedujeron los teoremas gráficos señalados con *A)* y *B)*, en los que se presenta el concepto de *elementos separados*. De estas dos proposiciones resulta un teorema gráfico, en el que no interviene el concepto de pares separados, si bien éste se emplea en la demostración:

Si se toman en un plano cuatro puntos A, B, C *y* D, *entre los cuales no haya tres en línea recta, y se proyectan desde* D *los vértices del triángulo* ABC *sobre los lados opuestos en* A_1, B_1 *y* C_1, *estos tres puntos no están en línea recta.*

En la figura 35, F, G, C y D son cuatro puntos de un plano que cumplen las condiciones impuestas; los vértices del triángulo FGC se proyectan desde D sobre los lados opuestos en A, B y H_1; el punto H está en la recta AB; según el teorema anterior, A, B y H no están en línea recta. Con esto queda demostrado que H_1 no coincide con H.

§ 11.—Figuras armónicas

63. Si dos series rectilíneas de distintas bases están compuestas del mismo número de elementos, y es preciso ver si pueden ser consideradas como figuras perspectivas, la primera condición á que han de satisfacer es que las bases estén en un plano y, por consiguiente, se corten en un cierto punto K. Si ocurre esto y se toman dos puntos F y G en una de las rectas y otros dos C y D en la otra (unos y otros arbitrarios, pero todos distintos del K), existe una perspectividad, tanto entre CD y FG, como entre CD y GF, pues las rectas CF y DG se cortan en un punto A, y las CG y DF en uno B, y los puntos C y D se proyectan en F y G desde A, y en G y F desde B. Pero si en una recta se toman tres puntos F, G y H, y en otra que encuentre á aquélla en un punto K (distinto de los F, G y H) se toman otros tres puntos cualesquiera C, D y E (distintos del K), no es en modo alguno necesario que F, G y H, y C, D y E formen, en alguna de las disposiciones en que pueden ser supuestos, figuras perspectivas. Por el contrario, si FGH y CDE han de ser figuras perspectivas y, por tanto, B su centro perspectivo, deberán estar en una recta B, E y H; si han de ser perspectivas GFH y CDE, en cuyo caso A sería el centro perspectivo, A, E y H deberán estar en línea recta, etc. Si se dan los puntos C y D como homólogos de los F y G, respectivamente, cada punto H de la recta FG determina el punto homólogo E en la recta CD.

Sean FGH y CDE series perspectivas, B su centro perspectivo y K su punto de coincidencia; en tal caso, no es preciso que las series FGH y CDE sean también perspectivas, cuando se consideren sus elementos en un orden distinto. Para que pueda CDE proyectarse también en GFH, las rectas CG,

Fig. 36.

DF y EH deben concurrir en un punto A, es decir, que entonces A, B, C y D son vértices de un cuadrivértice completo, en el que dos lados opuestos se cortan en F y otros dos en G, mientras que de los dos restantes (que se cortan en E), uno pasa por H y otro por K.

Dados, pues, en una recta tres puntos F, G y H, existen series rectilíneas que son perspectivas á un tiempo con FGH y GFH; para obtener una de ellas CDE se construye un triángulo ABC, cuyos lados BC, CA y AB pasen, respectivamente, por F, G y H, y se halla el punto D, intersección de AF y BG, y el E, intersección de AB y CD. Las bases de todas las series que están en posición perspectiva, tanto con FGH como con GFH, sin contener H, cortan á la base de la serie dada en un punto fijo K (**62**). Recíprocamente: si la base de una serie CDE, perspectiva con la FGH, pasa por K, también GFH y CDE son perspectivas. Pues si B es el punto en que se cortan CF, DG y EH, y A el de intersección de DF y CG, $ABCD$ es un cuadrivértice completo en que dos lados opuestos pasan por F, otros dos por G y un quinto lado por K, y como H está determinado por los puntos F, G y K del mismo modo que lo está K por los F, G y H, el sexto lado AB pasará

por H, luego BH (ó, lo que es lo mismo, EH) pasa por A, y las rectas CG, DF y EH concurren en A.

Para que una proyección de la serie rectilínea FGH, *que no contenga el punto* H, *sea al mismo tiempo proyección de la* GFH, *es necesario y suficiente que la base de la proyección y la de la serie dada pertenezcan á la radiación* K *que esta serie determina.* Si en un triángulo ABC los lados BC, CA y AB pasan, respectivamente, por F, G y H, las rectas AF, BG y CK concurren en un punto D (*).

Si los puntos C y D se proyectan en F y G desde B, y en G y F desde A, sobre la recta FG existirán dos puntos y sólo dos, H y K, que desde A y B se proyecten en los mismos puntos de la recta CD; de los dos puntos H y K, el uno, H, es distinto de su proyección, y el otro, K, por el contrario, coincide con la suya (**). Los puntos F, G y H, ó G, F y H (en uno de estos dos órdenes de colocación únicamente) determinan, pues, el punto K de tal modo, que una serie $CDEK$ aparece como proyección de $FGHK$ y de $GFHK$. Ahora bien, entre los puntos F, G, K y H existe exactamente la misma relación de dependencia que entre los F, G, H y K, y, por consiguiente, en toda serie que sin contener K pueda ser proyectada en FGK y en GFK resultará H como su propia proyección. Así ocurre, en efecto, en la serie $ABEH$, que es perspectiva con las $FGHK$ y $GFHK$, siendo los centros de proyección respectivos D y C. Según esto, *el par* HK *(ó* KH*) depende del* FG *(ó* GF*) por la condición de que* FGHK *y* GFHK *puedan proyectarse en una misma serie* MNPQ, debiendo necesariamente confundirse K y Q ó H y P, pero conviene evitar el que se crea que precisamente ha de ser K el que se confunda con su proyección. Si suponemos fijo el par FG, los puntos restantes de la recta FG pueden considerarse de dos en dos, formando pares HK, de tal modo que un punto de cada par determina el otro. *Los puntos* F *y* G *están siempre separados por los* H *y* K. Pues ó los puntos G y H están separados por los F y K, ó lo

---

(*) Pues si D es el punto de intersección de AF y BG y E el de CD con AB, la serie CDE es proyección de la FGH desde B y de la GFH desde A, luego la recta CD pasa por K.—*(N. T.)*

(**) Pues, evidentemente, uno ha de estar en la recta AB y el otro ha de ser intersección de CD con FG.—*(N. T.)*

están los H y F por los G y K ó los F y G por los H y K, excluyendo cada una de estas posiciones las otras dos; ahora bien, si los G y H estuviesen separados por los F y K, esta misma posición se deduciría, por la perspectividad supuesta, para los pares NP y MQ, y de estos, nuevamente, para los FH y GK; del mismo modo, la condición de estar separado el par HF por el GK exigiría que ocurriese lo mismo con los pares GH y FK. En atención á la posición relativa de los pares GH y FK se dice que F y G están armónicamente separados por H y K. Pero, *también* H *y* K *están armónicamente separados por* F *y* G. Pues los lados BE, EC y CB del triángulo CBE pasan, respectivamente, por H, K y F, mientras que las rectas CH, BK y EG concurren en un punto L, como se ve observando que los triángulos CBG y HKE son perspectivos por cortarse BG y KE, GC y EH y CB y HK en puntos D, A y F de una recta. Por el contrario, *los puntos* G *y* H *no están armónicamente separados por los* F *y* K, *ni lo están los* H *y* F *por los* G *y* H, *etc.*

Los puntos F, G, H y K reciben el nombre de armónicos (forman una serie armónica, una figura rectilínea armónica); los F y G, así como los H y K, son conjugados; dos puntos conjugados forman un par. Los dos pares son permutables entre sí, y también pueden ser permutados, dentro de cada par, los dos elementos cónjugados. Si, pues, una de las ocho series

$$FGHK,\ GFHK,\ FGKH,\ GFKH,\ HKFG,$$
$$HKGF,\ KHFG,\ KHGF$$

es armónica, también lo son las demás; pero ninguna otra permutación de los mismos cuatro puntos es, en tal caso, armónica. Dados tres puntos cualesquiera F, G y H en una recta, se puede construir un cuarto punto K, y sólo uno, tal que $FGHK$ sea una serie armónica; al punto K se le llama cuarto punto armónico respecto de los puntos dados FGH (ó GFH), los cuales están de tal modo ordenados, que los dos primeros son conjugados y el último es conjugado del que falta. Para construir el cuarto punto armónico K respecto de los F, G y H, se traza por H una recta cualquiera y se toman en ella dos puntos arbitrarios A y B; éstos se proyectan desde un punto D en F y G,

y desde uno C en G y F, y la recta CD determina en la FG el punto buscado K. Las rectas CF, FA, AC y BD son los lados de un cuadrilátero completo, en el que A, C y F son tres vértices, y los tres vértices opuestos á éstos, B, D y G, son intersecciones de los lados del triángulo ACF con la recta BD. Las rectas AB, CD y FG, que unen pares de vértices opuestos, se llaman diagonales del cuadrilátero completo. *En la diagonal* FG *hay dos vértices,* F y G, *del cuadrilátero completo y dos puntos,* H y K, *intersecciones con las otras dos diagonales; estos cuatro puntos son siempre armónicos.*

64. Para reconocer si la figura rectilínea $FGHK$ es armónica, se toma como auxiliar otra figura rectilínea $MNPQ$, perspectiva con ella, en la que se confundan M con F, ó N con G, etc. Supongamos que sean Q y K los puntos que coinciden; en tal caso, para que la figura $FGHK$ sea armónica es preciso que las $GFHK$ y $MNPQ$ estén también en posición perspectiva. Si así ocurre, también la serie $MNPQ$ es armónica. Para aplicar esto á series perspectivas cualesquiera $FGHK$ y $F'G'H'K'$, de las cuales es armónica la primera, se necesita examinar solamente el caso en que no coinciden F y F', ni G y G', etc. Los puntos H' y K son, en tal caso, distintos uno de otro, y la recta $H'K$ es cortada por los rayos concurrentes FF', GG', HH' y KK' en $MNPQ$, de tal modo, que P se confunde con H' y Q coincide con K; luego si $MNPQ$ es armónico, también lo es $F'G'H'K'$.

Si una de dos series perspectivas es armónica, también lo es la otra. O, de otro modo: Toda proyección de una serie armónica es, á su vez, armónica.

65. Si, en una figura plana, una serie es armónica, con ello se considera una propiedad gráfica de la figura plana. En la definición de puntos armónicos indudablemente no se han relacionado estos puntos sólo por medio de conceptos gráficos, sino que se ha necesitado tomar otros elementos auxiliares, y estos elementos extraños pueden no estar en el plano de aquella figura. Pero la arbitrariedad permitida en la elección de estos elementos puede utilizarse para realizar el estudio de la serie en alguno de los planos que la contienen, por consiguiente, en particular, en el plano de la figura considerada. Si pasamos, pues, á una figura radiada perspectiva, á la serie de puntos corresponde un haz de rectas, al que,

según el principio establecido en el § **10**, se puede aplicar la propiedad señalada en la serie y, por tanto, se pueden dar también definiciones análogas para la figura radiada.

Según esto, se dice que cuatro rayos *f*, *g*, *h* y *k* de un haz son armónicos, ó forman un haz armónico, cuando existe un haz *mnpq*, concéntrico con aquél, perspectivo con el *fghk* y el *gfhk* ó el *fgkh*. Los rayos *f* y *g*, así como los *h* y *k*, se llaman conjugados; dos rayos conjugados forman un par; los dos pares están separados uno por otro. Los teoremas sobre series armónicas pueden aplicarse, sin necesidad de más, á los haces de rectas armónicas. En cada haz armónico *mnpq* se pueden, pues, permutar los dos pares entre sí, así como en cada par los elementos conjugados, pero con cualquier otro cambio, deja de existir la posición armónica. Si un haz de rectas *mnpq* es perspectivo con otro *fghk* concéntrico con él, y, al mismo tiempo, con el *gfhk*, necesariamente se confunden *p* y *h* ó *q* y *k*. Si los rayos *f*, *g*, *h* y *k* de un haz armónico se proyectan en los *m*, *n*, *p* y *q* de otro concéntrico con él, también los haces *gfhk* y *mnpq* son perspectivos. Si uno de dos haces concéntricos perspectivos es armónico, también lo es el otro, etc., etc.

Si un haz de rectas y una serie rectilínea están en posición perspectiva, puede considerarse aquél como una figura radiada y la serie como una figura plana perspectiva contenida en uno de los planos que no pasan por el vértice del haz. La investigación de si un haz de rectas es armónico se realiza dentro de la figura radiada á la cual pertenece el haz; el ver si una serie es armónica puede hacerse en cada uno de los planos que la contienen. La posición armónica es, según esto, una propiedad que, en el caso de la perspectividad, se transmite del haz de rectas á la serie de puntos, y recíprocamente. *Si un haz de rectas y una serie están en posición perspectiva y una de las dos figuras es armónica, también lo será la otra.* Toda sección de un haz de rectas armónico, es una serie armónica; todo haz de rectas que proyecta una serie armónica, es armónico.

De aquí se deduce, que si dos haces de rectas son perspectivos con la misma serie rectilínea y uno de ellos es armónico, también el otro posee esta propiedad. Podemos, pues, decir para todas las especies de haces de rectas perspectivos

que: *Si uno de dos haces de rectas perspectivos es armónico, también lo es el otro.* Toda proyección de un haz de rectas armónico es, según esto, también armónica. Si una sección (serie rectilínea ó haz de rectas) de un haz de planos es armónica, también lo son todas las demás.

En general: *Si una de dos figuras planas perspectivas es armónica, también lo es la otra.*

66. Si un haz de rectas contenido en una figura plana es armónico, no se puede tratar de esta propiedad, según la definición antes dada, sin salirse del plano de la figura. Se llega á otra definición que no utiliza ningún elemento exterior al plano del haz, del siguiente modo: Sean A el vértice de un haz de rectas armónico y $FGHK$ una de sus secciones, por tanto, una serie armónica. Tomemos un punto cualquiera B en el rayo AH, y sean FG y GF las proyecciones de AB desde D y C, respectivamente (*). En virtud de la dependencia entre el cuadrivértice completo $ABCD$ y los puntos F, G y H, el lado CD pasa por K; designemos por E el punto de intersección de este lado CD con el AB. Si, según la costumbre, un haz cuyo vértice es A y cuyos rayos pasan, respectivamente, por F, G, H..... se representa abreviadamente por la notación $A\,(FGH\ldots\ldots)$, tendremos que, tanto los haces $A\,(FGHK)$ y $B\,(FGHK)$ como los $A\,(CDEK)$ y $B\,(CDEK)$, son perspectivos, luego también lo son los $A\,(GFHK)$ y $B\,(FGHK)$. Recíprocamente: si dos haces de rectas perspectivos $A\,(FGHK)$ y $B\,(FGHK)$ están en un plano y también los $A\,(GFHK)$ y $B\,(FGHK)$ son perspectivos, el $A\,(FGHK)$ es armónico. Pues si los rayos AG y BG se encuentran en C y los AF y BG en D, la sección perspectiva de los haces $A\,(GFHK)$ y $B\,(FGHK)$ está en la recta CD, sobre la cual deben cortarse, según esto, AH y BH, AK y BK. Uno de los rayos AH y AK es, seguramente, distinto de AB; supongamos que lo es AK; entonces son distintos AK y BK; K está en CD, pero H no, luego A, B y H pertenecen á una recta y la serie $FGHK$ es armónica y, por consiguiente, la misma propiedad tiene el haz $A\,(FGHK)$.

Según esto, puede definirse un haz armónico como un haz

(*) Dicho de otro modo: C y D son puntos de intersección de AG y BF, y de AF y BG, respectivamente.—*(N. T.)*

que es perspectivo con otro *mnpq* de su plano y, además, con el *nmpq* ó con el *mnqp*.

Si los rayos *f* y *g* de un haz están en posición perspectiva con los *m* y *n* de otro y también con los *n* y *m*, los *f*, *g*, *m* y *n* se cortan de dos en dos y, por tanto, pertenecen á una radiación ó están en un plano. Pueden, pues, comprenderse las definiciones anteriores en la siguiente: Se dice que un haz de rectas *fghk* es armónico, cuando es perspectivo con otro *mnpq* y, al mismo tiempo, con el *nmpq* ó con el *mnqp*.

Si los haces de rectas *fghk* y *gfhk* son perspectivos con el *mnpq*, *h* y *p* ó *k* y *q* se confunden. Si los haces *fgh* y *gfh* son perspectivos con el *nmp* y *h* es diferente de *p*, tendrán un rayo *k* común con él, y el haz *fghk* es armónico. Si el haz *fghk* es armónico y perspectivo con el *mnpq*, también los *fghk* y *nmpq* son perspectivos.

67. Pasemos ahora á los haces de planos. Se dice que cuatro planos *F*, *G*, *H* y *K* de un haz son armónicos, cuando el haz *FGHK* es perspectivo con otro haz de planos *MNPQ* y, además, con el *NMPQ* ó el *MNQP*. Como los haces de planos perspectivos forman una figura radiada, la posibilidad del haz de planos armónicos resulta de la existencia del haz de rectas armónico, como toda propiedad gráfica sobre figuras radiadas resulta de la correspondiente sobre figuras planas. Sean *O* el vértice de la radiación de planos *FGHKMNPQ*; O_1 otro punto cualquiera de la arista del haz *FGHK*; *fghk* y *mnpq* la sección de aquella radiación por un plano que no contenga los puntos *O* y O_1; y M_1, N_1, P_1 y Q_1 los planos determinados por O_1 y las rectas *m*, *n*, *p*, y *q*. En este caso, *fghk* y *mnpq* son haces de rectas; $M_1N_1P_1Q_1$ es un haz de planos; *fghk* es perspectivo con *mnpq* y, además, con *nmpq* ó con *mnqp*, luego *FGHK* es perspectivo con $M_1N_1P_1Q_1$ y, al mismo tiempo, con $N_1M_1P_1Q_1$ ó con $M_1N_1Q_1P_1$. La propiedad de ser armónico el haz de planos *FGHK* puede, según esto, ser tratada con la intervención de planos que pasen por un punto cualquiera de la arista.

En el haz de planos *FGHK* se llaman conjugados los rayos *F* y *G*, así como los *H* y *K*; los *F* y *G* están separados por los *H* y *K*, etc. Se puede definir el haz de planos armónico como haz que es cortado en un haz de rectas armónico.

Si dos haces de planos están en posición perspectiva y uno

de ellos es armónico, también lo es el otro, pues la sección perspectiva de ambos es, en tal caso, armónica. Finalmente, si un haz de planos y una serie de puntos están en posición perspectiva y una de las dos figuras es armónica, también lo será la otra.

Estas observaciones y las anteriores relativas á ellas pueden ahora reunirse en el siguiente teorema: *Si una de dos figuras perspectivas es armónica, también lo es la otra.* Pero el establecer un teorema que, dentro de la brevedad de su expresión, comprende casos tan diferentes y de apariencias muy diversas, exige una formación adecuada y gran generalidad en los conceptos que en él intervienen. Se hubiera logrado difícilmente obtener estas propiedades con los conceptos de perspectividad y posición armónica, si nos hubiésemos limitado á la terminología en que dos rectas de un plano no tienen necesariamente un punto de intersección, ni dos planos una recta común.

68. Más adelante tendremos ocasión de aplicar los siguientes teoremas, que se deducen de lo hasta aquí expuesto:

Si los puntos F *y* G *están armónicamente separados, tanto por los* H *y* K, *como por los* U *y* V, *se puede pasar de la serie*

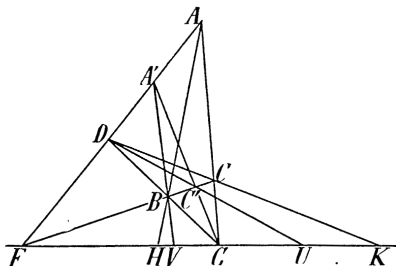


Fig. 37.

FGKU *á la* FGHV *por sucesivas proyecciones.* En efecto, por ser *FGHK* armónica, se puede construir un cuadrivértice *ABCD* tal, que *AD* y *BC* se corten en *F*, *AC* y *BD* en *G*, *AB* pase por *H* y *CD* pase por *K*. Por ser armónica *FGUV*, si *BV* encuentra á *AF* en *A'* y *GA'* encuentra á *BF* en *C'*, la

recta DC' pasará por U. Resulta, pues, que la figura $FGKU$ se proyecta sobre BC desde D en $FBCC'$, ésta sobre AD desde G en $FDAA'$ y ésta sobre FG desde B en $FGHV$.

Según esto, si FGHK *y* FGUV *son figuras armónicas y* F *y* U *están separados por* G *y* K, *también lo estarán* F *y* V *por* G *y* H.

Si FGHK *y* FGUV *son figuras armónicas,* H *y* K *no estarán separados por* U *y* V. En efecto, puesto que F y G están separados por U y V, también lo estarán por uno de los pares KU y KV, por el KV, por ejemplo (*); en tal caso F y G no están separados por K y U, pero lo estarán, por ejemplo, F y U por los G y K (**). De aquí, aplicando el teorema anterior, resulta que también F y V están separados por G y H, pero no lo están por G y U, luego F y V lo están por H y U (*). Según esto, U y V están separados por F y G, pero no por H y F; luego U y V lo están por G y H (***); además, G y K están separados por F y U, pero no por G y H, luego G y K lo están por H y U (***); por último, H y U están separados por G y K, pero no por G y V, luego H y U lo están por K y V (***) y H y K no lo están por U y V.

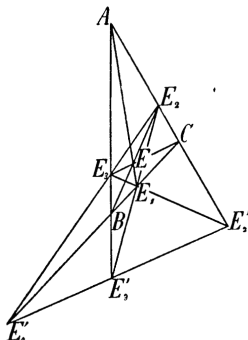


Fig. 38.

69. Sean A, B y C tres puntos que no están en línea recta; a, b y c sus rectas de unión BC, CA y AB; E un punto del plano ABC que no está en las rectas a, b y c; y, finalmente, e una recta del plano ABC, que no pertenece á los haces A, B y C. Las rectas a, b y c dan, por intersección con los rayos AE, BE y CE, respectivamente, tres puntos E_1, E_2 y E_3; los puntos A, B y C dan por unión con los ae, be y ce, respecti-

(*) Según el teorema 22 del § **1.**—*(N. T.)*
(**) Según el teorema 19 del § **1.**—*(N. T.)*
(***) Según el teorema 21 del § **1.**—*(N. T.)*

vamente, las rectas e_1, e_2 y e_3. Puesto que los trivértices ABC y $E_1E_2E_3$ son perspectivos, las rectas a y E_2E_3, b y E_3E_1 y c y E_1E_2 se cortan en puntos E'_1, E'_2 y E'_3 de una recta; á esta recta se le llama polar armónica ó trilineal (ó simplemente polar) del punto E respecto del trivértice ABC, ó del trilátero abc. Puesto que las series $BCE_1E'_1$, $CAE_2E'_2$ y $ABE_3E'_3$ son armónicas, *la polar de* E *respecto de* ABC *pasa por los cuartos puntos armónicos de los* BCE_1, CAE_2 *y* ABE_3. También los triláteros abc y $e_1e_2e_3$ son perspectivos, y las rectas de unión de los puntos A y e_2e_3, B y e_3e_1 y C y e_1e_2 pasan por un punto que se designa con el nombre de polo armónico ó trilineal (ó simplemente polo) de la recta e respecto del trivértice ABC, ó del trilátero abc; así, pues, *los cuatro rayos armónicos de* bce_1, cae_2 y abe_3 *pasan por el polo de* e *respecto de* ABC. Si e', e'' y e''' son las rectas de unión de los puntos A, B y C con los E_1, E_2 y E_3, respectivamente, como la serie CBE'_1E_1 es armónica, AE es el cuarto rayo armónico de los b, c y e', BE es el de los c, a y e'' y CE el de los a, b y e''', luego E es el polo de la recta $E'_1E'_2$, esto es, *el punto* E *es siempre polo de su polar*. Asimismo, *la recta* e *es siempre la polar de su polo.*

70. Sean A, B y C tres planos que no pertenecen á un haz; a, b y c sus rectas de intersección BC, CA y AB; E un plano de la radiación ABC, exterior á los haces a, b y c; por último, e una recta de la radiación ABC, exterior á los planos A, B y C. Las rectas a, b y c dan con las AE, BE y CE, respectivamente, tres planos E_1, E_2 y E_3; los planos A, B y C dan con los ae, be y ce, respectivamente, tres rectas de intersección e_1, e_2 y e_3. Los planos de los rayos a y E_2E_3, b y E_3E_1 y c y E_1E_2, pasan, entonces, por una recta que se llama polar armónica (ó simplemente polar) del plano E respecto del triarista abc ó del triedro ABC, y las rectas de intersección de los planos A y e_2e_3, B y e_3e_1 y C y e_1e_2 están en un plano que se llama polar armónico (ó simplemente polar) del rayo e respecto del triedro ABC ó del triarista abc. *La polar de* E *respecto de* abc *está en los cuartos planos armónicos de los* BCE_1, CAE_2 y ABE_3; *la polar de* e *respecto de* ABC *contiene los cuartos rayos armónicos de los* bce_1, ace_2 y abe_3. *El plano* E *es polar de su recta polar; la recta* e *es polar de su plano polar.*

71. Finalmente, sean A, B, C y D cuatro puntos que no estén en un plano; A', B', C' y D' los planos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente; E un punto exterior á los planos A', B', C' y D'; y E' un plano que no pertenezca á las radiaciones A, B, C y D. Los planos A', B', C' y D' dan con las rectas AE, BE, CE y DE, respectivamente, cuatro puntos de intersección E_1, E_2, E_3 y E_4; y los puntos A, B, C y D, determinan con las rectas $A'E'$, $B'E'$, $C'E'$ y $D'E'$, respectivamente, cuatro planos E'_1, E'_2, E'_3 y E'_4. Si E_{12} es el punto de intersección del plano ABE con la recta CD, E_{13} el de intersección del plano ACE con la recta BD....., etc., las rectas $E_{14}E_{23}$, $E_{24}E_{31}$ y $E_{34}E_{12}$ se cortan en E, luego la $E_{13}E_{14}$ (del plano BCD) y la $E_{23}E_{24}$ (del plano ACD) se encuentran en un punto E''_{12} de la recta CD, las $E_{12}E_{14}$ y $E_{23}E_{34}$ en un punto E''_{13} de la BD,....., etc.; los puntos E''_{12}, E''_{13} y E''_{14} del plano A' están en la polar de E_1 respecto de BCD; los puntos E''_{23}, E''_{24} y E''_{12} del plano B' están en la polar de E_2 respecto de CDA....., etc. De aqui se deduce, que los puntos E''_{12}, E''_{13}, E''_{14}, E''_{23}, E''_{24} y E''_{34} están en un plano, que recibe el nombre de polar armónico (ó, simplemente, polar) del punto E respecto del tetraedro $A'B'C'D'$ ó del cuadrivértice $ABCD$. *El plano polar de* E *respecto del tetraedro* A′B′C′D′ *contiene las rectas polares de* E_1, E_2, E_3 *y* E_4 *respecto de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC*, respectivamente. Del mismo modo, las rectas polares de E'_1, E'_2, E'_3 y E'_4 respecto de los triedros $B'C'D'$, $C'D'A'$, $D'A'B'$ y $A'B'C'$, respectivamente, pasan por un punto que se llama polo armónico (ó, simplemente, polo) del plano E' respecto del cuadrivértice $ABCD$ ó del tetraedro $A'B'C'D'$. El punto E_1 es polo de la recta $E''_{12}E''_{13}$, respecto del triángulo BCD, luego AE es polar del plano $AE''_{12}E''_{13}$ respecto del triedro $B'C'D'$; del mismo modo, BE es polar del plano $BE''_{12}E''_{23}$ respecto del triedro $C'D'A'$, etc.; esto es, *el punto* E *es el polo de su plano polar*. Asimismo, *el plano* E′ *es polar de su polo*.

§ 12.—De la correlación

72. Nos toca hacer ahora el estudio circunstanciado de las relaciones entre teoremas gráficos que por primera vez pudieron apreciarse en el § **9**. Una de ellas fué establecida en el § **10** y utilizada en el § **11**; por su medio, las proposiciones sobre figuras radiadas pueden deducirse de las relativas á figuras planas, substituyendo los puntos por rectas y las rectas por planos. Los teoremas 1.° y 2.° del § **9**, de una parte, y los 3.° y 4.° de otra, ofrecen el primer ejemplo de una transformación de esta naturaleza. Pero hay aún otra correspondencia, esencialmente diferente de ésta, que, además, no se limita únicamente á aquellas figuras particulares. Basta comparar los teoremas 1.°, 2.°, *a)* y *b)* del § **9** con los 4.°, 3.°, *d)* y *c)* del mismo artículo para reconocer cómo, mediante un cambio muy sencillo, se pasa del primer grupo al segundo; á saber: substituyendo, una por otra, las palabras «punto» y «plano».

Esta observación se extiende á todo el contenido de la Geometría de la posición; se pueden substituir—según se hará ver—las palabras «punto» y «plano» entre sí en todos los teoremas gráficos, siempre que al mismo tiempo se hagan las ulteriores substituciones que la indicada lleva consigo. Efectuando estos cambios en un teorema gráfico, se obtiene otro diferente (en general), que también es cierto; pero, aplicándolos á este segundo teorema, resulta nuevamente el primero.

Se dice, por esto, que en la Geometría de la posición hay una correlación ó dualidad entre puntos y planos, y frente á cada concepto gráfico se coloca un concepto correlativo ó dual. Cada concepto es correlativo de su correlativo. «Punto» y «plano», «serie rectilínea» (puntos situados en una recta) y «haz de planos» (planos que pasan por una recta), «puntos de un plano» y «planos de una radiación», «rectas de una radiación» y «rectas de un plano», «recta de unión de dos puntos» y «recta de intersección de dos planos», y «figura radiada» y «figura plana» son conceptos correlativos. La «recta», la «incidencia», la «posición separada» de pares de elementos y el «haz de rectas» (rectas que están en un plano y pasan por un punto) son conceptos correlativos de sí mismos, es decir, no varían cuando se hace la substitución indicada. A cada figura corresponde una correlativa. Si dos figuras son perspectivas, de lo dicho en el § **10** se deduce que también lo son sus correlativos. Como consecuencia de esto, examinando las definiciones dadas en el § **11**, se ve que la serie de puntos armónica y el haz de planos armónico son figuras correlativas, y que el haz de rectas armónico es una figura correlativa de sí misma. Diremos, pues, simplemente que los conceptos de «perspectivo» y «armónico» son correlativos de sí mismos.

Si en una proposición gráfica se substituyen todos los conceptos geométricos por sus correlativos, se obtiene la proposición correlativa ó dual. Cada proposición es correlativa de su correlativa. Algunas son correlativas de sí mismas; por ejemplo, la siguiente: «Si uno de dos haces de rectas perspectivos es armónico, también lo es el otro».

El conocimiento de la dualidad en la Geometría de la posición es de la mayor conveniencia, porque justifica, una vez reconocida la exactitud de un teorema no correlativo de sí mismo, la enunciación de otro, el correlativo, sin necesidad de demostración alguna. Pues si se ha demostrado que el principio de dualidad es general, queda con ello reconocida la certeza del teorema correlativo. Pero, aunque un atento examen de los teoremas gráficos hasta aquí expuestos basta para confirmar aquel principio para éstos, no disponemos, sin embargo, por el momento de los medios apropiados para establecer su generalidad, y debemos conformarnos por aho-

ra con fundamentar la correlación entre punto y plano dentro de ciertos límites.

73. En el § **7** se demostraron por primera vez teoremas gráficos; los que les seguían en los §§ **8** y **9** eran, casi exclusivamente, de la misma naturaleza. A partir de allí, los desarrollos han tenido un carácter completamente determinado; sólo se han deducido propiedades gráficas, no empleando para ello teoremas de otro carácter. Los §§ **10** y **11** contienen, pues, Geometría gráfica construída con los medios gráficos puros que previamente se habían reunido en los §§ **7**, **8** y **9**. Estos medios no son independientes entre si, pero esto es indiferente para nuestros fines (*); en lo único que debemos fijarnos es en que no es preciso ningún otro teorema para formar la Geometría de la posición, en lo que de ella hemos visto hasta ahora.

De lo dicho al comienzo del § **9** se infiere que todos los teoremas á que actualmente podemos llegar pueden deducirse de los contenidos en los §§ **7**, **8** y **9**, relativos á propiedades gráficas, en unión de los 6.°, 7.°, 8.°, 9.° y 12.° del § **2** y de los 3.° y 6.° del § **8**. Cuando ni en el enunciado, ni en la demostración de un teorema se mencionan elementos propios, la demostración se hace con el auxilio de aquellos teoremas gráficos simplemente; los demás sólo pueden ser utilizados si en ellos no intervienen otros elementos que propios. Distinguiremos estos dos grupos de teoremas con los nombres de «primero» y «segundo». Si en los del segundo grupo, en que se habla de puntos propios de una recta, siempre que se diga de uno de éstos que está ó no entre otros dos, se añade la expresión «por exclusión del plano *N*» y se substituyen en todo lugar los elementos propios por elementos cualesquiera, se obtienen teoremas gráficos exactos en todas sus partes, que pueden ser incluídos en el primer grupo.

Si se trata de un teorema gráfico, los elementos propios no aparecen en su enunciado. Los teoremas del segundo grupo sólo pueden intervenir en la demostración, por consiguiente,

(1) Actualmente se concede gran importancia á la cuestión de *independencia* de los axiomas, cuyo número se procura reducir al mínimo posible. Bajo este aspecto pueden considerarse como definitivos los resultados obtenidos por Hilbert en su ya citada notabilísima obra *Grundlagen der Geometrie*.—*(N. T.)*

cuando se toman elementos propios como auxiliares en la misma. Cuando esto sucede, siempre que en la demostración se hable de tres puntos propios en línea recta y se diga de uno de ellos que está ó no entre los otros dos, se añade la expresión «por exclusión del plano N» y se substituyen en seguida los elementos propios por elementos cualesquiera, con lo cual el teorema pasa del lugar que ocupaba en el segundo grupo al correspondiente en el primero. La demostración así modificada tiene completa validez, pero es independiente en absoluto de los teoremas del segundo grupo, de donde se sigue que todos los teoremas que pueden deducirse de ambos grupos son ya demostrables con la ayuda del primero.

La Geometría de la posición debe, pues, limitarse á obtener consecuencias de los teoremas gráficos de los §§ **7**, **8** y **9**, hasta que la asociación de nuevos axiomas permita la ampliación de su campo.

74. Después de lo dicho, no presenta ninguna dificultad el establecer la correlación entre punto y plano en la Geometría de la posición, en cuanto de los axiomas hasta aquí expuestos pueda deducirse. La ley de correlación queda reconocida, desde luego, como cierta para los teoremas gráficos de los §§ **7**, **8** y **9**, puesto que en el mismo grupo están contenidos cada uno de estos teoremas y su correlativo. Cualquier otro teorema que pueda considerarse, es una consecuencia de éstos. En su enunciado y en su demostración se aplican sólo conceptos gráficos, y aun entre ellos, es posible limitarse á los primarios; los demás se deducen de éstos y pueden ser obtenidos con el auxilio de las definiciones respectivas. Aquel teorema es, pues, el resultado de una consideración en la que sólo intervienen los conceptos gráficos primarios y sólo se hace referencia á los teoremas gráficos antes designados. Si en esta consideración se substituyen constantemente las palabras «punto» por «plano» y «plano» por «punto», y los teoremas utilizados por sus correlativos, su exactitud no queda disminuída, pero en su resultado se han permutado entre sí las palabras «punto» y «plano», es decir, se ha demostrado el teorema correlativo.

La ley de correlación entre punto y plano es, según esto, cierta, al menos en los límites indicados, pero debe ser nuevamente estudiada más adelante.

75. Volvamos otra vez á los teoremas gráficos del § **9**. Quedan aún por investigar las relaciones entre los teoremas 1.° y 3.° y 2.° y 4.° Los primeros tratan de figuras planas; los segundos de figuras radiadas. La consideración que sigue hará ver la ley de transformación en virtud de la cual se pasa de una figura plana á otra también plana, y de una radiada á otra asimismo radiada, y que, en general, no tiene aplicación á otras figuras.

Los teoremas 1.° y 3.° del § **9** se transforman uno en otro, cuando se permutan entre sí los elementos «punto» y «recta». Ahora bien; examinando con cuidado los teoremas gráficos hasta aquí sentados, que se refieren á figuras planas, se observa constantemente la licitud de aquella permutación; y como esto, según se demostrará, depende de una ley general, se dice que en la planimetría gráfica hay una correlación ó dualidad entre puntos y rectas, y frente á cada concepto gráfico de la planimetría se coloca uno correlativo ó dual. En esta correlación relativa á las figuras planas, son correlativos «punto» y «recta», «serie rectilínea» y «haz de rectas», «recta de unión de dos puntos» y «punto de intersección de dos rectas»; la «incidencia» y «el estar separados» son correlativos de sí mismos. Si dos figuras de su plano son perspectivas, con arreglo á las definiciones dadas en el § **10** también sus figuras correlativas lo son. De aquí se sigue, además, que los conceptos «perspectivo» y «armónico» son también correlativos de sí mismos en el plano.

Si en un teorema gráfico que trate de una figura plana, se substituyen todos los conceptos por los correlativos, se obtiene el teorema correlativo ó dual de Planimetría, cuyo correlativo es nuevamente el primero; y si uno de dos teoremas de esta naturaleza ha sido demostrado, puede enunciarse el otro sin demostrarlo particularmente. En esto consiste el principio de dualidad para las figuras planas, de cuya validez vamos á convencernos ahora.

Se llega en seguida á ello observando que el paso del teorema 1.° al 3.°, del § **9**, puede realizarse por medio del teorema 2.° Se pasa del 1.° al 2.° por la aplicación de una de las dos leyes de transformación ya establecidas (*), y del 2.° al

(*) La que se expone en el núm. **56**.—*(N. T.)*

3.° por la aplicación de la otra (*), según lo cual, se llegará del 1.° al 3.° directamente por medio de la unión de ambas. Apliquemos esto á un teorema gráfico cualquiera de Planimetría. En él sólo se puede hablar de puntos y rectas que están en un plano, de la incidencia de los elementos y de la posición separada de los pares. La proposición subsiste cuando se substituyen en ella los puntos por rectas, las rectas por planos y el plano por un punto, pero se refiere entonces á una figura radiada. En virtud de la correlación entre punto y plano, al teorema así obtenido corresponde nuevamente uno de Planimetría; para obtenerlo, basta hacer la substitución de planos por puntos, del punto por un plano y conservar invariable todo lo demás. Las dos transformaciones sucesivamente aplicadas dan, pues, como resultado, que los puntos se cambian por rectas y las rectas por puntos, esto es, conducen al teorema dual de Planimetría.

76. En las figuras radiadas existe una ley semejante, mediante la cual los teoremas 2.° y 4.° del § **9** se corresponden. En cada proposición gráfica que se refiera á una figura radiada, se pueden permutar entre sí los elementos «recta» y «plano», según lo cual, existe en ellas una correlación entre las rectas y los planos. Son correlativos de sí mismos los conceptos de «incidencia», «posición separada», «perspectividad» y «armonicidad», y son correlativos unos de otros, «recta» y «plano», «haz de rectas» y «haz de planos», «plano de dos rectas» y «recta de intersección de dos planos». Si de dos proposiciones correlativas sobre figuras radiadas una es exacta, también lo es la otra. Para convencerse de ello, basta aplicar la dualidad entre punto y plano á la consideración precedente (**).

Al establecer la dualidad entre puntos y rectas de un plano, y entre rectas y planos que pasan por un punto, hemos hecho uso de la dualidad entre puntos y planos, y como ésta no ha podido ser demostrada sino con ciertas limitaciones, con

(*) La contenida en el núm. **74.**—*(N. T.)*

(**) La aplicación de la ley de dualidad general á dos proposiciones correlativas en Planimetría, da por resultado dos proposiciones correlativas en la radiación; si, pues, son ciertos el principio general de correlación y el particular de la Planimetría, también lo es el de las figuras radiadas.—*(N. T.)*

las que á éstas corresponden quedarán, por ahora, aquéllas. Más adelante, en los §§ **16** y **18**, volveremos de nuevo á tratar de la ley general de correlación, con el fin de hacer desaparecer las citadas limitaciones, y cuando esto logremos, las restricciones con que se han establecido las dos leyes particulares de la correlación desaparecerán por sí mismas.

77. Hemos dicho antes que cuanto de Geometría gráfica podemos conocer actualmente, existe como consecuencia de los teoremas gráficos de los §§ **7**, **8** y **9**; en éstos pueden substituirse constantemente las palabras punto y plano y, por tanto, las consecuencias son también legítimas, sin restricción alguna, cuando en ellas se haga la indicada substitución. Por otra parte, si la Geometría ha de ser realmente deductiva, el proceso de la deducción debe ser, en efecto, independiente del *carácter* del concepto geométrico, como debe serlo de las figuras; solamente pueden tenerse en cuenta las *relaciones* entre los conceptos geométricos establecidas á modo de definiciones en los teoremas utilizados. En el curso de la deducción es lícito y útil, pero *en modo alguno necesario,* pensar en la significación de los conceptos geométricos que se presentan; de tal modo, que precisamente cuando esto se hace necesario, de ello resulta lo defectuoso de la deducción y (si los defectos no desaparecen por modificación del razonamiento) la insuficiencia de los teoremas que, como medio de demostración, se habían antepuesto. Pero, si con todo rigor se ha deducido un teorema de un grupo de proposiciones—á las que llamaremos teoremas ó principios fundamentales—la deducción tiene el valor del objeto mismo de que se parte. Pues si de los teoremas fundamentales resultan de nuevo otros exactos cuando los conceptos geométricos que en aquéllos se relacionan se substituyen por otros determinados, también es lícita la substitución correspondiente en el teorema; se obtiene así, sin repetir la deducción, un teorema (en general, nuevo) consecuencia de los teoremas fundamentales transformados. De esto se ha hecho ya repetida aplicación en el primer artículo, después en el tercero y en el cuarto, y, por último, en el presente, no sólo para establecer la correlación entre punto y plano, sino al demostrar que todos los teoremas gráficos á que ahora podemos llegar, pueden deducirse de los contenidos de los §§ **7**, **8** y **9**.

Las observaciones hechas en los artículos 1.° y 6.° sobre el procedimiento de demostración, quedan con éste completadas (*). Se ve que esta discusión no es supérflua, observando que, frecuentemente, quedan incumplidas las condiciones de antemano impuestas, hasta en trabajos que se refieren á los fundamentos de la Geometría ó de otras disciplinas matemáticas. Según la manera general de ver, los teoremas deben ser consecuencias lógicas de los axiomas. Pero no siempre se hace concienzudo uso de todos los medios de demostración. En el § **6** se ha dicho que esto procede, en parte, de la aplicación de las figuras; pero aun cuando no pueda hacerse ninguna imagen material, ni aun siquiera una representación interna de ella, simplemente el uso de muchas palabras con las que son designados los conceptos geométricos más sencillos, ejerce ya cierta influencia en uno mismo. Una parte de las expresiones con cuyo manejo estamos familiarizados en la vida ordinaria por un uso prematuro de ellas, las encontramos nuevamente en la Ciencia; y, como en la vida ordinaria, al usar aquellas expresiones, enlazamos siempre, al mismo tiempo, con nuestros pensamientos relaciones entre los conceptos geométricos, sin que de ello nos demos cuenta exacta, no se logra fácilmente alejar por completo, aun en la Ciencia rigorosa, tales involuntarias mezclas. Precisamente éstas deben ser puestas de manifiesto, para que la base sobre la cual se edifica la Geometría pueda ser examinada en su verdadera extensión.

En la investigación de nuevas verdades conviene servirse, sin duda alguna, de todos los medios que puedan conducir al fin, pero no ocurre lo mismo en el examen y exposición de los resultados obtenidos, los cuales, en la Matemática, únicamente son satisfactorios cuando los nuevos hechos aparecen como una consecuencia de los ya conocidos. Esta condición

(*) Véase también la exposición hecha en mi discurso académico «Sobre el valor de formación de la Matemática», 1894, así como también en la obra *Grundlagen der Analysis*, 1909, al comienzo del § **2**. (En este libro, en las páginas 182 y siguientes, está contenido un extracto de aquel discurso).

Otro punto de vista esencialmente distinto sobre la significación de los axiomas en Geometría, y el papel que en ella desempeñan las figuras, es el de Klein, *Mathematische Annalen,* 1890, tomo XXXVII, pág. 571.—*(N. A.)*

tiene su origen en la naturaleza misma de esta Ciencia, en la que se ofrece, más frecuente que en ninguna otra, la posibilidad de hallar sin una particular experimentación, simplemente por deducción, resultados nuevos y exactos; y queda satisfecha con tanta más seguridad, cuanto más se aleja la investigación de los conceptos fundamentales; por consiguiente, cuanto más exclusivamente se ocupa de conceptos compuestos que, á causa de su vulgar significación, no permiten que entre ellos se establezca relación alguna que pudiera deslizarse inadvertidamente en el curso de la deducción. No se crea, sin embargo, que el hecho de que la Matemática haya de ir unida á un método rigurosamente deductivo, capaz de hacerla exacta, constituya una traba inútil. El valor de tal método estriba en que excluye toda arbitrariedad en el procedimiento de demostración que le corresponde, mientras que en cualquiera otro desaparece la incontestabilidad de la demostración por no poder ejercerse la crítica en límites bien definidos. La incontestabilidad de las demostraciones en las que los teoremas se reducen á los axiomas, unida á la evidencia de éstos, que debe poder verificarse por las más simples experiencias, infunde á la Matemática el carácter de absoluta certeza que de ordinario se le atribuye. Claro es que para conseguir darle este carácter en toda su extensión, habrá necesidad á veces de alguna prolijidad; pero, por otra parte, precisamente como consecuencia del rigor de la exposición, resultarán posteriores simplificaciones. Poco ha, al comienzo de este número, se ha mostrado reiteradamente la conveniencia de tal carácter de la demostración; y se advierte en seguida—y sobre esto quisiera yo hacer fijar aquí muy particularmente la atención—, la inutilidad de ciertos elementos que suelen acompañar á una exposición de la naturaleza indicada (*). La Ciencia toma una parte de sus materiales, directamente del lenguaje de la vida ordinaria; de este origen proceden modos de expresión é ideas con los cuales no debieran formularse proposiciones científicas y que, introducidos también en la Matemática, han sido causa de que aparezcan confusas algunas de sus partes y se hayan suscitado numerosas

(*) Como ejemplo de palabras supérfluas, pueden citarse «espacio» y «dimensión», ninguna de las cuales se presenta en esta obra.—*(N. A.)*

discusiones, especialmente sobre asuntos geométricos. Solo una exposición absolutamente rigurosa permitirá ver con claridad el papel que desempeñan en el sistema los diversos conceptos y relaciones, y hasta qué punto son necesarios ó inútiles para el conjunto. Cuando, con tal motivo, se hayan reunido todos los elementos precisos y eliminado los supérfluos, se tendrá base cierta para aquellas discusiones, si no es que, con la selección hecha, han resultado ya sin objeto.

Adición al § 12.

Véase: *Grundlagen der Analysis,* 1909, páginas 1 y 7.

Ateniéndose á las condiciones establecidas al hablar del método de demostración, se deberá renunciar á hacer uso de ciertos conceptos, si se pretende definirlos todos explícitamente, es decir, al modo que se define, por ejemplo, el rectángulo como un paralelogramo cuyos ángulos son rectos. Hay conceptos que sólo pueden ser definidos implícitamente, esto es, enunciando las expresiones en que pueden presentarse, y el significado en que tales expresiones deben ser entendidas.

En esta obra se han dado definiciones implícitas de los siguientes conceptos: línea recta (**6**) y plano (**16**), en su acepción propia; al mismo lado y á distintos lados (**7**, **18** y **21**); semirecta (**18**), y punto (**30**), recta (**35**) y plano (**40**) en la acepción generalizada; pudiendo aún agregarse la observación hecha sobre el ángulo (**83**). En cuanto á la aplicación de las definiciones implícitas en Análisis, véase: *Mathematische Annalen* 1892, tomo XL, pág. 149; *Grundlagen der Analysis*, 1909. Las definiciones implícitas se refieren á conceptos de los cuales podría prescindirse, pero que han tomado, sin embargo, carta de naturaleza, porque no sólo facilitan el lenguaje, sino también la marcha progresiva.

Finalmente, debe observarse que las definiciones implícitas no conducen á consecuencias falsas ó vacías de sentido, lo cual resulta del espíritu mismo de las demostraciones matemáticas. (*Grundlagen der Analysis*, Apéndice al § **2**.)

§ 13.—De las figuras congruentes

78. En todas las consideraciones geométricas relativas á una figura, se supone que los elementos que la constituyen pertenecen á un cuerpo sólido, ó que, al menos, están invariablemente unidos entre sí. En los desarrollos precedentes se ha llegado á admitir que todos los elementos que intervienen en una cuestión forman una figura, en el sentido ahora indicado, y, por consiguiente, que cuando se relacionan dos figuras, como ocurría, por ejemplo, al definir la perspectividad, deben ambas estar invariablemente unidas entre sí.

Para introducir el concepto de congruencia, vamos á limitarnos, por ahora, á figuras compuestas únicamente de puntos propios. Supondremos que cada figura pertenece á un cuerpo sólido, pero sin pretender que todas las que simultáneamente se consideren estén en el mismo. Si $ABCD$ es una figura dada, los grupos de puntos AB, AC, ABC, etc., pueden ser á su vez llamados figuras; pero cuando se den dos figuras EF y GH no conviene necesariamente el nombre de figura al grupo $EFGH$, porque pueden aquéllas ser movibles una respecto de otra.

Para comenzar por el caso más sencillo, supongamos que los puntos de cada uno de los grupos AB y $A'B'$ están invariablemente unidos. Las figuras AB y $A'B'$ pueden ser, una respecto de otra, movibles ó no. Admitamos primero que lo sean. En tal caso, se pueden mover (una vez apartados los

elementos de los sólidos que lo impidan), hasta que los puntos A y A' ó los B y B' coincidan. Si se llegan á realizar al mismo tiempo ambas coincidencias, se dice que las figuras AB y $A'B'$ se han superpuesto; y si nuevamente se la mueve de un modo cualquiera, se dice que son superponibles.

Si, como siempre, consideramos dada la figura AB, se pueden construir figuras que sean superponibles á la AB. Para ello se hace uso de un sólido al que puedan pertenecer simultáneamente los puntos A y B, y sobre él se toman dos puntos A_1 y B_1, tales que las figuras AB y A_1B_1 puedan superponerse. Se aplica, por ejemplo, una regla ó escala á los puntos A y B, y sobre ella se señalan las posiciones en que toca á estos puntos, ó se apoyan las puntas de un compás en ellos, y aquellas señales ó estos puntos pueden ser designados por A_1 y B_1. Es indiferente cuál proviene del punto A y cuál del B; en general, si la figura A_1B_1 puede superponerse á la AB, también es superponible á la BA.

Volvamos ahora á las figuras AB y $A'B'$, que, como antes habíamos supuesto, son movibles una respecto de otra. Designemos por A_1B_1 una figura móvil respecto de las AB y $A'B'$, que pueda superponerse á la AB, y veamos si también los $A'B'$ y A_1B_1 son superponibles. Se ve que este ensayo equivale por completo al anterior, en el cual AB y A_1B_1 eran inmediatamente adaptables, esto es, si (prescindiendo de AB y A_1B_1) $A'B'$ y A_1B_1 son superponibles, también lo son AB y $A'B'$, y recíprocamente. Si de las tres figuras AB, $A'B'$ y A_1B_1 una es superponible á las otras dos, también éstas lo son entre sí.

79. Prescindamos ahora de que las figuras AB y $A'B'$ sean ó no movibles una respecto de otra. En todo caso, se puede construir una figura móvil respecto de las dos y que pueda superponerse á una de ellas. Cuando es posible superponer la misma figura, tanto á la AB como á la $A'B'$, estas dos AB y $A'B'$ se llaman congruentes.

Cuando las figuras AB y $A'B'$ son movibles una respecto de otra, se reconoce que son congruentes si pueden superponerse y, en tal caso, no es necesario acudir á una tercera figura. Cuando las figuras AB y $A'B'$ están invariablemente unidas entre sí, por ejemplo, si están trazadas en la misma hoja, no es ciertamente imposible deshacer tal unión; pero siempre

conviene, y á veces es hasta necesario, poseer otro medio de comparación. Estamos acostumbrados, en efecto, á comparar tales figuras por el intermedio de otra auxiliar que, de ordinario, viene representada por dos puntos de una regla ó por las puntas de un compás, intervención que es necesaria cuando las dos figuras AB y $A'B'$ tienen uno ó los dos puntos comunes. No debe quedar excluido el caso de coincidir A' con A ó con B; dentro de una figura ABB' pueden ser congruentes las partes AB y AB'. También se han comparado antes las figuras BA y AB, y hemos visto que una misma figura puede superponerse á ambas. Las figuras AB y BA deben, pues, llamarse congruentes, pero no pueden ser comparadas directamente.

Aunque limitándonos por el pronto al caso más sencillo, hemos definido la significación de la palabra «congruente», valiéndonos de un nuevo concepto: el de dos figuras superponibles. Al mismo tiempo, hemos citado varias propiedades muy simples relativas al nuevo concepto, las cuales se han tomado directamente de la experiencia. Estas propiedades y otras varias de igual carácter, son formuladas ahora como axiomas, para después continuar nuevamente el desarrollo deductivo.

AXIOMA I. *Las figuras* AB *y* BA *son congruentes.*

80. Sean ahora tres figuras AB, $A'B'$ y $A''B''$, movibles unas respecto de las otras; según hemos dicho antes, las $A'B'$ y $A''B''$ son superponibles si la AB puede superponerse á ambas. Pero prescindamos otra vez de que las figuras estén unidas ó no, y supongamos que, tanto AB y $A'B'$, como AB y $A''B''$, sean congruentes. Se puede, pues, hacer uso de una figura A_1B_1, superponible á las AB y $A'B'$, y de otra, $A'_1B'_1$, superponible á las AB y $A''B''$; siendo movibles, la figura A_1B_1 respecto de las AB y $A'B'$, y la $A'_1B'_1$ respecto de las AB y $A''B''$. Las figuras A_1B_1 y $A'_1B'_1$ son congruentes; como podrían estar invariablemente unidas, tomemos una figura A_0B_0, movible respecto de todas las anteriores, que sea superponible á la AB. En tal caso, son superponibles A_0B_0 y AB, A_1B_1 y AB y $A'_1B'_1$ y AB, luego también A_0B_0 y $A'B'$ y A_0B_0 y $A'_1B'_1$; además, lo son $A'B'$ y A_1B_1 y $A''B''$ y $A'_1B'_1$, luego también A_0B_0 y $A'B'$ y A_0B_0 y $A''B''$, es decir, $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes. Resulta, pues, que si dos figuras $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes con una figura AB, ellas lo son en-

tre sí. Esta propiedad constituirá un caso particular del séptimo axioma.

Si AB es una figura dada, se puede construir una $A'B'$, congruente con ella, en la cual uno de sus puntos sea arbitrariamente elegido. Para ello, puede construirse una figura A_1B_1, movible respecto de la AB y del punto A', que sea superponible á la AB, y por medio de A_1B_1 (así, pues, con el compás, por ejemplo), se halla en seguida B' y, caso necesario, se le une invariablemente á A'. Esta propiedad está contenida, como el caso más sencillo, en el octavo axioma. Debe añadirse aquí, sin embargo, que en cuanto al punto B', aún puede imponérsele una condición determinada. El punto A' podrá ser tomado á capricho; hagámoslo coincidir con A, y desde este punto tracemos un segmento rectilíneo hasta un punto C, con lo cual resulta la figura ABC; se puede pedir que el punto B' esté en este segmento ó en su prolongación por el lado de C; siempre habrá uno, y solo uno, que cumpla tales condiciones.

Axioma II. *Dada la figura* ABC, *se le puede agregar siempre un punto propio* B', *y solo uno, tal que* AB *y* AB' *sean figuras congruentes y* B' *esté en el segmento* AC *ó* C *esté en el segmento* AB'.

Si, pues, se designa por r la recta AC y se toma en ella el punto propio C', fuera de la semirecta AC, existen en la recta r dos puntos propios, B' y B'', (y solo dos), uno situado en la

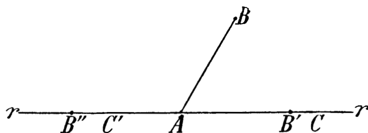


Fig. 39.

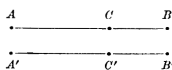
semirecta AC y otro en la AC', tales que AB, AB' y AB'' son figuras congruentes. Los puntos B' y B'' pueden determinarse por medio del compás.

81. Consideremos ahora dos figuras ABC y $A'B'C'$, compuestas de tres puntos cada una, las cuales podrán estar invariablemente unidas ó no. Para examinar á la vez los dos

casos, partimos de que siempre puede construirse una figura $A_1 B_1 C_1$, movible respecto de aquéllas, y que puede superponerse á una, á la ABC, por ejemplo, en cuya operación los puntos A y A_1, B y B_1 y C y C_1 se confundirían. Tal figura puede tomarse como perteneciente á todo sólido capaz de tocar al mismo tiempo á los puntos A, B y C. Cuando sea posible superponer una misma figura $A_1 B_1 C_1$, tanto á la ABC, como á la $A'B'C'$, las figuras ABC y $A'B'C'$ se llaman congruentes. Pero es de advertir que no es ya indiferente, como antes ocurría, el orden de sucesión en que están escritos los puntos. Si la figura $A_1 B_1 C_1$ es superponible á la ABC, no lo es, en general, á la BAC. Si ABC y $A'B'C'$ son figuras congruentes, lo son con seguridad las BAC y $B'A'C'$, pero, en general, no lo serán las BAC y $A'B'C'$. Los puntos correspondientes A y A', B y B' y C y C', se llaman puntos homólogos de las figuras congruentes.

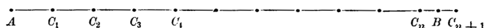
Al dar la figura ABC, se da la AB como una parte superponible á la figura $A_1 B_1$. Ahora, si $A_1 B_1 C_1$ puede superponerse á ABC y $A'B'C'$, también serán superponibles $A_1 B_1$ y $A'B'$, luego las figuras AB y $A'B'$ son congruentes. Llamaremos partes homólogas de las figuras congruentes ABC y $A'B'C'$ á las figuras AB y $A'B'$, AC y $A'C'$ y BC y $B'C'$. La congruencia de tales partes homólogas es un caso particular del sexto axioma.

La figura ABC puede componerse de tres puntos de una recta. Supongamos que C está en la recta AB, entre A y B, que las figuras AB y $A'B'$ pueden superponerse á la $A_1 B_1$ y, por último, que A y B, A' y B' y A_1 y B_1 están unidos por medio de segmentos rectilíneos. Si superponemos las figuras AB y $A_1 B_1$, vemos que los puntos del segmento AB se confunden con los del $A_1 B_1$, y se dice, por esto, que se han superpuesto los segmentos AB y $A_1 B_1$; obteniéndose, á la vez un punto C_1, del segmento $A_1 B_1$, que se confunde con el punto C. Del mismo modo, resulta que los segmentos $A_1 B_1$ y $A'B'$ son superponibles, por cuya razón se dice que los AB y $A'B'$ son congruentes. Superponiendo ahora los segmentos $A_1 B_1$ y $A'B'$ se halla un punto determinado C' del segmento $A'B'$, sobre el cual viene á colocarse el punto C_1, y las figuras ABC y $A'B'C'$ resultan congruentes.



AXIOMA III. *Si el punto* C *está dentro del segmento rectilíneo* AB *y las figuras* ABC *y* A′B′C′ *son congruentes, el punto* C′ *está dentro del segmento rectilíneo* A′B′.

82. Los segmentos congruentes son utilizados al tratar de medir un segmento AB con otro UV. Según lo dicho al establecer el axioma II, se puede tomar en la semirecta AB el punto C_1, tal que AC_1 y UV sean figuras congruentes (se trata aquí sólo del caso en que C_1 cae entre A y B). El axioma II permite prolongar AC_1 hasta C_2, y esto de un solo modo, de manera que los segmentos C_1A y C_1C_2 sean congruentes, con lo cual también lo serán los AC_1 y C_1C_2. Igualmente, se puede



prolongar el segmento C_1C_2, uno C_2C_3, congruente con él; después éste, el C_3C_4, también congruente con los anteriores, y así sucesivamente. Al medir se aspira, sin embargo, á poner un término á estas operaciones, y no sólo se aspira, sino que se llega. La serie de puntos C_1, C_2 y C_3 ..... se continúa únicamente hasta C_n, si B se confunde con C_n ó está comprendido entre C_n y C_{n+1}, y á tal punto C_n se puede llegar siempre mediante un número finito de construcciones.

AXIOMA IV. *Si el punto* C_1 *está dentro del segmento rectilíneo* AB *y se prolonga el segmento* AC_1 *en el* C_1C_2, *congruente con él, después el* C_1C_2 *en el* C_2C_3, *también congruente con él, y así sucesivamente, se llega siempre á un segmento* $C_n C_{n+1}$, *que contiene el punto* B (*).

83. Consideremos nuevamente la figura ABC, compuesta de tres puntos de una recta, y supongamos que los segmentos AC y BC son congruentes, con lo cual dicho está que C está entre A y B. Si se construye una figura $A_1B_1C_1$ superponible á la ABC y se superponen los segmentos BA y A_1B_1, el punto C_1 viene á un punto

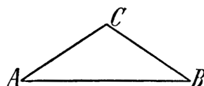


Fig. 40.

(*) Este es el llamado postulado de Arquimedes en su forma métrica. Su independencia respecto de los demás ha sido demostrada por Hilbert (véase su ya citada obra *Grundlagen der Geometrie*, 3.ª ed., 1909, página 31). Esta independencia hace posible el construir un sistema geométrico, perfectamente lógico, en el cual se prescinde del postulado de Arquimedes, que se llama Geometria *no Arquimediana*.—*(N. T.)*

determinado del segmento BA, que no puede ser diferente de C; las figuras ABC y BAC son, según esto, congruentes, observación aplicable aunque A, B y C no pertenezcan á una recta.

Axioma V. *Si los segmentos* AB *y* BC *de la figura* ABC *son congruentes, las figuras* ABC *y* BAC *son congruentes.*

Esta propiedad puede ser enunciada en otra forma. Si CA y C_1A_1 son segmentos cualesquiera, pero que no estén invariablemente unidos entre sí, podremos moverlos hasta que los puntos C y C_1 se confundan y, al mismo tiempo, el A esté en el segmento C_1A_1, ó el A_1 en el segmento CA. Cada punto de la semirecta CA se confunde entonces con uno de la semirecta C_1A_1, y recíprocamente, por lo cual diremos que las semirectas CA y C_1A_1 han sido superpuestas. Si los segmentos CA y CB de la figura ABC pertenecen á rectas diferentes, y lo mismo ocurre con los segmentos C_1A_1 y C_1B_1 contenidos en la figura $A_1B_1C_1$ y, además, las dos figuras no están invariablemente unidas, se las podrá mover hasta que se superpongan las semirectas CA y C_1A_1, ó las CB y C_1B_1. Cuando ambas cosas se realizan al mismo tiempo, se dice que se han superpuesto los ángulos ACB y $A_1C_1B_1$ (*); pero, de que los ángulos ACB y $A_1C_1B_1$ puedan superponerse, no se deduce que lo mismo ocurra á las figuras ACB y $A_1C_1B_1$; para que suceda esto, es necesario y suficiente que los segmentos CA y C_1B_1 y los CB y C_1B_1 sean congruentes.

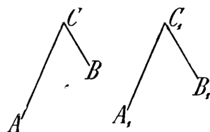


Fig. 41.

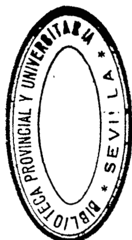
84. Sean, ahora, ABC y $A'B'C'$ dos figuras dadas, en las cuales los segmentos CA y CB, así como los $C'A'$ y $C'B'$, pertenecen á rectas diferentes. Se puede siempre construir una figura $A_1B_1C_1$, movible respecto de las ABC y $A'B'C'$, tal que los ángulos ACB y $A_1C_1B_1$ sean superponibles (por medio del transportador), siendo para esto indiferente el orden en que estén colocadas las semirectas, es decir, que los ángulos BCA y $A_1C_1B_1$ son superponibles. Cuando se puede superponer un

(*) No se intenta con esto dar una definición de ángulo.

mismo ángulo $A_1C_1B_1$ á los ACB y $A'C'B'$, se llaman éstos congruentes.

Sean ACB y $A'C'B'$ dos ángulos congruentes, para lo cual no es preciso que las figuras ACB y $A'C'B'$ sean congruentes. Podemos elegir, sin embargo, la figura $A_1C_1B_1$, de manera que las figuras ACB y $A_1C_1B_1$ sean superponibles; para que también lo sean las $A'C'B'$ y $A_1C_1B_1$ es, además, necesaria y suficiente la congruencia de los segmentos $C'A'$ y C_1A_1 y $C'B'$ y C_1B_1. Por consiguiente, siempre que CA y $C'A'$, CB y $C'B'$ sean segmentos congruentes, las figuras ACB y $A'C'B'$ (ó las ABC y $A'B'C'$) son congruentes.

Según esto, los ángulos ACB y BCA son siempre congruentes. Si, además, se toman, en particular, segmentos congruentes CA y CB, también son congruentes las figuras ABC y BAC; resultado conforme con el axioma V.



85. Estamos ahora, ya, en condiciones de considerar figuras constituídas por cualquier número de puntos. Sean $ABCD$ ..... y $A'B'C'D'$ ..... figuras compuestas del mismo número de puntos. Se puede construir, siempre, una figura $A_1B_1C_1D_1$ ....., movible respecto de aquéllas, que pueda superponerse á una de ellas, á la $ABCD$ ....., por ejemplo, en cuya operación los puntos A y A_1, B y B_1 ....., se confundirán. Cuando la figura $A_1B_1C_1D_1$ ..... es superponible á las dos dadas, se llaman éstas congruentes. La congruencia no depende, sin embargo, de la figura $A_1B_1C_1D_1$ .....; si se ha reconocido que las figuras $ABCD$ ..... y $A'B'C'D'$ ..... son congruentes, y puede llevarse una de ellas sobre la figura $A_0B_0C_0D_0$ ....., movible respecto de las dos, también se podrá llevar la otra sobre la $A_0B_0C_0D_0$ ..... Por esto, puede expresarse el carácter de las figuras congruentes diciendo que cada una puede ocupar la posición de las otras.

Para reconocer la congruencia de las figuras $ABCD$ ..... y $A'B'C'D'$ ....., se hace uso de una figura auxiliar $A_1B_1C_1$ D_1 ..... y se hacen coincidir, primero, los puntos A y A_1, B y B_1 ....., y después, los A' y A_1, B' y B_1 ..... Los puntos A y A', así como los B y B', ..., cuya correspondencia queda así establecida, se llaman p u n t o s h o m ó l o g o s. A cada parte de la figura $ABCD$ ..... corresponde una parte de la $A'B'C'D'$ ....., la compuesta de los puntos homólogos; á estas partes se les puede llamar p a r t e s h o m ó l o g a s, y cada dos de ellas son

superponibles á una parte determinada de la figura $A_1 B_1 C_1 D_1$ .....

Axioma VI. *Si dos figuras son congruentes, también lo son sus partes homólogas* (*).

No queda, en esto, excluído el caso de coincidir partes homólogas, por ejemplo, el de dos figuras congruentes ABC y ABC'. Estamos autorizados, en efecto, á llamar á cada figura congruente consigo misma; pero, al hacerlo así, es cada punto homólogo de sí mismo, y, por consiguiente, debe tenerse presente que la congruencia de que se trata no es la existente entre los segmentos AB y BA, y los ángulos ABC y BCA. Cuando en dos figuras congruentes un punto se corresponde consigo mismo, se puede decir que las dos figuras tienen un punto correspondiente común (**).

86. Un caso particular del sexto axioma había sido citado ya antes; análoga generalización se hace de otras dos observaciones precedentes. Si suponemos que las figuras $A'B'C'D'$ ..... y $A''B''C''D''$ ..... son congruentes con una tercera $ABCD$ ....., será siempre posible construir una figura $A_0B_0C_0D_0$ ....., movible respecto de aquellas tres, y superponible á la última; y las dos primeras figuras se podrán también superponer á la $A_0B_0C_0D_0$ .....

Axioma VII. *Dos figuras congruentes con una tercera, son congruentes entre sí.*

87. Si, de cualquier manera, se dan una figura AB y un punto A', se puede (como ya se ha dicho) unir á este punto otro B', tal que AB y $A'B'$ sean figuras congruentes. Pero si se dan las figuras ABC y $A'B'$, no siempre se podrá unir á la última un punto C' de manera que ABC y $A'B'C'$ sean figuras congruentes; para que tal ocurra, es necesaria y suficiente la congruencia de las figuras AB y $A'B'$. En general: si se dan dos figuras ABC ..... KL y $A'B'C'$ ..... K', y las ABC ..... K y $A'B'C'$ ..... K' son congruentes, se puede tomar el punto L', tal que ABC ..... KL y $A'B'C'$ ..... $K'L'$ sean

(*) Necesitamos poner esta proposición entre las axiomáticas para no tener que volver, en posteriores artículos, sobre la definición de congruencia.

(**) Conforme á lo dicho en el § **10**, nosotros lo llamaremos de coincidencia.—(*N. T.*)

figuras congruentes. Para obtenerlo, se construirá una figura $A_0 B_0 C_0$ ..... $K_0 L_0$ movible respecto de las dos dadas y superponible á la ABC ..... KL, y se la superpondrá á la $A'B'C'$ ..... K'. Todas estas propiedades están comprendidas en el siguiente axioma, una vez admitido que un punto aislado forma una figura, y que dos puntos pueden siempre contarse entre las figuras congruentes.

AXIOMA VIII. *Si una de dos figuras congruentes se amplía con un punto propio, se puede ampliar la otra con un punto, también propio, de manera que las dos nuevas figuras sean, á su vez, congruentes.*

88. En los dos casos más sencillos se puede sobrepasar la posibilidad enunciada en este axioma. Cuando se dan una figura FG y un punto A, y se trata de hallar una figura AB congruente con la FG, se puede aún añadir la condición de que B esté en una recta cualquiera trazada por A (Axioma II) y, en este caso, aún puede escogerse entre dos puntos á distintos lados del A. Cosa análoga sucede cuando, dadas las figuras AB y FGH, tales que AB y FG son congruentes, hay que determinar la ABC congruente con FGH, si se supone que la figura FGH no es rectilínea. Tomando, entonces, una figura $F_0 G_0 H_0$, movible respecto de las AB y FGH, y superponible á la FGH, con lo cual AB y $F_0 G_0$ también lo serán, y trazando un plano que pase por los puntos A y B, se podrá llevar $F_0 G_0 H_0$ hasta que $F_0 G_0$ y AB se confundan y, al mismo tiempo, el punto H caiga sobre uno del plano, lo cual sólo puede ocurrir de dos maneras. Según esto, en el plano existen dos puntos C y D que dan lugar á figuras ABC y ABD congruentes con la FGH, y se ve, además, que C y D están á distintos lados de la recta AB.

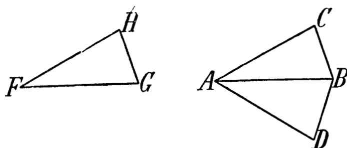


Fig. 42.

AXIOMA IX. *Si* AB *y* FGH *son figuras tales que* F, G *y* H *no pertenecen á un segmento rectilíneo y* AB *y* FG *son congruentes y se traza una superficie plana por* A *y* B, *en ella ó en*

su prolongación pueden hallarse dos puntos C *y* D *tales que las figuras* ABC *y* ABD *sean congruentes con la* FGH *y los segmentos* CD *y* AB, *ó sus prolongaciones, tienen un punto común.*

Teniendo en cuenta observaciones anteriores, esto puede expresarse también así: si AB y FGH son figuras dadas y F, G y H puntos que no están en línea recta, y se traza un plano por A y B, en él se podrá—y esto no de un solo modo—tomar el punto C tal que los ángulos ABC y FGH sean congruentes; pero si los puntos C y C' están en un plano del mismo lado de la recta AB, los ángulos ABC y ABC' no son congruentes (*).

89. Pero si partimos ahora de dos figuras ABC y $FGHI$ y se supone que las figuras ABC y FGH son congruentes, no obtendremos un axioma análogo. Si la figura ABC se puede ampliar de más de una manera para ser congruente con la $FGHI$, por ejemplo, en las $ABCD$ y $ABCE$, las figuras $ABCD$ y $ABCE$ serán congruentes. Para ver si esto es posible, admitiremos que no se trata de figuras planas, pues el caso de serlo queda resuelto por medio de los axiomas anteriores. Supongamos, pues, que D es exterior al plano ABC, y superpongamos á la figura $ABCD$ otra $A_1B_1C_1D_1$; resulta entonces imposible la superposición de $ABCE$ y $A_1B_1C_1D_1$.

Axioma X. *Dos figuras* ABCD *y* ABCE *cuyos puntos no están en una superficie plana, no son congruentes.*

Se llega á otra expresión de esta propiedad por medio de la siguiente consideración:

Si los puntos A, B, C y D no están contenidos en un plano y designamos por m la recta AB, existe un «ángulo» CmD con la «arista» m y las caras mC y mD. Sea $A_1B_1C_1D_1$ una figura movible respecto de la $ABCD$, y llamemos m_1 á la recta A_1B_1. Podremos mover estas figuras hasta que se superpongan los semiplanos mC y m_1C_1 (es decir, que cada punto del uno caiga en uno del otro y, en particular, cada punto de la recta m en uno de la m_1), ó los mD y m_1D_1. Si ambas cosas

(*) Debe excluirse en esta consideración el tomar dos puntos C y C' en línea recta con el B, si bien entonces, aunque los ángulos ABC y ABC' serían congruentes, no lo serían las figuras ABC y ABC', por no poder serlo, según el axioma II, las BC y BC', puesto que por estar C y C' al mismo lado de AB están en el mismo semirayo BC.—*(N. T.)*

ocurren al mismo tiempo, se dice que los ángulos CmD y $C_1m_1D_1$ se han superpuesto. Si $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son superponibles, también lo son los ángulos CmD y $C_1m_1D_1$. Si A', B', C' y D' son puntos que tampoco están en un plano y se representa por m' la recta $A'B'$, puede suceder que un ángulo $C_1m_1D_1$ pueda superponerse á los CmD y $C'm'D'$; en tal caso, éstos se llaman congruentes. Si las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes, también lo son los ángulos CmD y $C'm'D'$. Tomemos ahora, fuera del plano ABC, el punto E del mismo lado que el D (*); entonces, los semiplanos mD y mE están al mismo lado del plano ABC; luego, ó está el semiplano mD entre los mC y mE (en el ángulo CmE) ó el mE entre mC y mD (en el ángulo CmD); en ambas posiciones, los ángulos CmD y CmE no son congruentes. De aquí se sigue que las figuras $ABCD$ y $ABCE$ no son congruentes cuando los puntos D y E están al mismo lado del plano ABC.

Finalmente, tomemos los puntos D y E á lados distintos del plano ABC, que distinguiremos con los nombres de derecha é izquierda, que no hay inconveniente en usar aquí. Si un observador colocado en la misma región que el punto D recorre la trayectoria rectilínea de A á B, tendrá el punto C á su derecha ó á su izquierda; pero cuando pase al mismo lado que el punto E, le parecerá que tiene á la derecha lo que antes tenía á la izquierda, y recíprocamente. Sean ahora $ABCD$ y $A'B'C'D'$ dos figuras congruentes, y $A_1B_1C_1D_1$ una superponible á las dos; la experiencia muestra que, en tal caso, las denominaciones derecha é izquierda se transmiten de la figura $ABCD$ á la $A_1B_1C_1D_1$ y de ésta á la $A'B'C'D$ sin variación alguna; y puesto que si D y E están á distintos lados del plano ABC no se realiza tal transmisión de la figura $ABCD$ á la $ABCE$, éstas no son congruentes.

(*) Debe aquí, á semejanza de lo ocurrido en el núm. **88**, excluirse el caso de que E esté en el plano ABD, si bien es de advertir que, aun siendo entonces congruentes los ángulos CmD y CmE, no lo serían las figuras $ABCD$ y $ABCE$, por no poder serlo las BCD y BCE, según el axioma IX, puesto que por estar D y E al mismo lado del plano ABC, están en el plano ABD al mismo lado de la recta AB.—*(N. T.)*

§ 14.—Extensión del concepto de congruencia á elementos cualesquiera

90. En los axiomas contenidos en el artículo anterior, intervienen como elementos de figuras congruentes sólo puntos, y éstos propios. En las explicaciones correspondientes no se ha mantenido esta limitación; sin embargo, el completo desarrollo de nuestro trabajo debe ser regulado exclusivamente por los axiomas y, en consecuencia, utilizaremos en lo que sigue únicamente propiedades y conceptos que estén contenidos en los axiomas sobre figuras congruentes ó en otros anteriores ó que de unos y otros puedan deducirse.

Si A, B y C y A', B' y C' son puntos propios, tales que los A, B y C están en línea recta y las figuras ABC y $A'B'C'$ son congruentes, el axioma III del § **13** nos dice que también A', B' y C' pertenecen á una recta; si, pues, una de dos figuras congruentes es una serie rectilínea, lo mismo sucede á la otra, y si en una de las figuras congruentes aparece una serie rectilínea, los puntos homólogos en la otra forman asimismo una serie rectilínea (§ **13**, A. VI). Si en una de las series un punto C está entre los A y B, en la serie homóloga estará el C' entre los A' y B' (§ **13**, A. III); la posición separada de dos pares pertenecientes á una de las series, lleva aparejada, según esto, la misma posición de los pares homólogos.

De lo ahora dicho se infiere que, en adelante, podremos tomar al mismo tiempo la recta de unión de dos puntos de una figura y la de sus homólogos de otra congruente con ella,

como formando parte de ambas, las cuales, después de esta ampliación, siguen llamándose congruentes; las dos rectas (propias) reciben el nombre de homólogas. Si en una de las figuras un punto y una recta son incidentes, lo mismo sucede á los elementos homólogos de la otra; si dos rectas de la primera se cortan en un punto propio, también las homólogas en la segunda se cortan y los puntos de intersección se consideran como homólogos.

Si A, B, C y D y A', B', C' y D' son puntos propios, tales que los A, B, C y D están en un plano y las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son congruentes, los puntos A', B', C' y D' deben pertenecer á un plano; pues, según el teorema 12.° del § **2**, las rectas AD y BC, ó las BD y AC, ó las CD y AB tienen un punto común y lo mismo ocurre, por consiguiente, á las rectas homólogas. Si, pues, una de dos figuras congruentes, ó una de sus partes, se compone de puntos de un plano, los puntos homólogos en la otra figura pertenecen también á un plano. Admitiremos en lo sucesivo que se agregan al mismo tiempo á dos figuras congruentes el plano de tres puntos de la primera (que no estén en línea recta) y el de los homólogos de la segunda, y después de esta ampliación llamaremos, como antes, congruentes á las figuras y homólogos á los planos (propios). Entonces, siempre que en una de las figuras un punto y un plano, ó una recta y un plano, sean incidentes, lo mismo ocurrirá á los elementos homólogos en la otra; si en la primera se cortan dos planos en una recta propia, ó un plano y una recta en un punto propio, lo mismo pasa con los elementos homólogos en la segunda, y pueden considerarse las rectas y los puntos de intersección, respectivamente, como elementos homólogos.

De un modo general, puede decirse que toda propiedad de los elementos de una figura que sólo se refiera á incidencia de los elementos ó á disposición de puntos en rectas, se transmite también á los elementos homólogos de la figura congruente. En particular, si en la primera figura dos pares de rectas de un haz propio están separados, lo mismo ocurre á las rectas homólogas en la otra figura.

91. Las anteriores consideraciones nos han llevado á agregar á figuras congruentes dadas, compuestas de puntos

propios, las rectas y los planos propios que aquéllos determinan, pero el axioma VIII del § **13** admite la posibilidad de ampliar las figuras con puntos propios cualesquiera y, por consiguiente, según demostraremos, con elementos cualesquiera. Para formarse idea de hasta qué punto hay en esto una correspondencia determinada de elementos homólogos, necesitamos intercalar ahora algunos teoremas.

Si F, G, H, I *y* K *son puntos propios y los* F, G *y* H *no estan en línea recta, las figuras* FGHI *y* FGHK *no son congruentes.* Para demostrarlo, tomemos á capricho, fuera del plano FGH, el punto propio L, diferente del I; como, en este caso, los planos FGL, FHL y GHL sólo tienen común el punto L, uno de ellos al menos, el FGL, por ejemplo, no contendrá el punto I. Si suponemos ahora que las figuras $FGHI$ y $FGHK$ fuesen congruentes, se podría tomar un punto M tal que $FGHIL$ y $FGHKM$ y, por consiguiente, también $FGHL$ y $FGHM$ fuesen congruentes, y entonces, puesto que, tanto F, G, H y M, como F, G, H y L, no están en un plano, el punto M debería confundirse con el L (§ **13**, A. X); las figuras $FGIL$ y $FGKL$ no serían, pues, planas, pero sí congruentes, lo cual está en contradicción con el mismo axioma.

Si A, B, C, D, F, G, H, I *y* K *son puntos propios, tales que los* A, B *y* C *no están en línea recta y las figuras* ABCD *y* FGHI *son congruentes, las figuras* ABCD *y* FGHK *no son congruentes.* Pues, en la hipótesis hecha, los puntos F, G y H no pertenecen á una recta; luego si $ABCD$ y $FGHK$ fuesen congruentes, lo serían también $FGHI$ y $FGHK$ (§ **13**, A. VII), resultado en contradicción con el teorema anterior.

Las figuras ABCD, FGHI *y* FGHK *sólo pueden, pues, ser congruentes entre sí, cuando coincidan* I *y* K *ó cuando* A, B *y* C *estén en línea recta.*

92. Sentado esto, sean F y F' dos figuras congruentes, y supongamos que en la figura F tres puntos propios A, B y C no están situados en línea recta, en cuyo caso tampoco lo estarán los homólogos A', B' y C' en la figura F'. Designando por D un punto propio cualquiera (distinto de los A, B y C), podrá ocurrir que pertenezca á la figura F—y entonces llamaremos D' al homólogo en la figura F'—ó no, y en este caso se podrá agregarlo á la figura F y ampliar la F' con un punto propio D', tal que las dos figuras resultantes sean, á su

vez, congruentes. En ambos casos, las figuras *ABCD* y *A'B'C'D'* son congruentes; luego *D'* está determinado por *A*, *B*, *C*, *D*, *A'*, *B'* y *C'*, ó por *D*, y la relación dada (congruencia) entre *F* y *F'*. Por consiguiente, al decir: *D* y *D'* son puntos homólogos en la congruencia dada entre *F* y *F'*, expresamos que existe un punto propio, y sólo uno, homólogo de cada punto propio dado. De modo análogo, designando por *r* una recta propia cualquiera, que puede pertenecer ó no á la figura *F*, por *A* y *B* dos de sus puntos propios y por *A'* y *B'* los homólogos, la recta *r'* de unión de éstos queda completamente determinada por la *r*, y podemos decir que *r* y *r'* son rectas homólogas en la congruencia dada. Por último, si *P* es un plano propio cualquiera; *H*, *I* y *K* tres puntos propios del mismo, no pertenecientes á una recta, y *H'*, *I'* y *K'* sus puntos homólogos, que están situados en el plano *P'*, también éste queda determinado por el *P*, y los dos planos *P* y *P'* son homólogos en la congruencia *FF'*. En virtud de esta congruencia, á cada figura compuesta de puntos, rectas y planos propios solamente, corresponderá como homóloga una figura bien determinada, la compuesta por los elementos homólogos de los de aquélla, y cada dos figuras homólogas serán congruentes. Esta correspondencia queda fijada dando dos figuras congruentes, de condiciones análogas á las *ABC* y *A'B'C'*.

Tal correspondencia no queda limitada, sin embargo, á elementos propios. Sea *D* un punto cualquiera; tomemos dos rectas propias *l* y *m* que pasen por él, y sean *l'* y *m'* sus homólogas y *D'* el punto *l'm'*. En tal caso, el punto *D'* queda determinado por el *D*, una vez fijada la congruencia *FF'*, puesto que á una radiación de rectas corresponde como figura homóloga una radiación de rectas. Los dos puntos *D* y *D'* reciben el nombre de homólogos; á cada punto corresponde uno homólogo, y sólo uno, y si uno de los dos es propio, el otro también lo es.

Si se toma ahora en una recta ó en un plano propios un punto cualquiera, el punto homólogo estará en la recta ó en el plano homólogos. A puntos de una recta cualquiera ó de un plano cualquiera corresponden puntos de la misma naturaleza. A pares de puntos separados contenidos en una recta, corresponden pares de puntos, también separados.

Según esto, no presenta ninguna dificultad hacer corresponder á cada recta una recta homóloga determinada y á cada plano un plano homólogo determinado. Haciéndolo así, dada una figura (compuesta de puntos, rectas y planos cualesquiera), se halla una figura homóloga determinada, y si se llaman congruentes dos figuras de esta especie, podrán ser enunciados los siguientes teoremas:

1.° *Las figuras congruentes tienen todas las propiedades gráficas comunes.*

2.° *Si dos figuras son congruentes, también lo son sus partes homólogas.*

Toda figura es congruente consigo misma. Dos puntos se consideran siempre como figuras congruentes.

3.° *Dos figuras congruentes con una tercera son congruentes entre sí.*

Así, pues, si dos partes de una de las figuras son congruentes, también lo son las partes de la otra homólogas de aquélla.

4.° *En dos figuras congruentes, á cada punto propio de la una corresponde un punto propio de la otra y, por consiguiente, á cada elemento propio de la una un elemento propio de la otra.*

5.° *Si una de dos figuras congruentes se amplia con elementos cualesquiera, se podrá ampliar la otra de manera que las figuras resultantes sean, á su vez, congruentes.*

Esta ampliación de figuras se cuenta entre las «construcciones».

6.° *Si dos figuras congruentes tienen tres puntos propios, no situados en línea recta, de coincidencia, todos sus elementos son de coincidencia.*

7.° *Si dos series rectilíneas congruentes tienen dos puntos propios de coincidencia, todos sus puntos son de coincidencia.*

En efecto, sean C y C' dos puntos cualesquiera, homólogos en dos series rectilíneas congruentes que tienen dos puntos propios de coincidencia A y B; D, el cuarto punto armónico de ABC y D' su homólogo, con lo cual también la figura $ABC'D'$ será armónica. Si C es un punto propio, situado entre A y B, por consiguiente, en la semirecta AB, también el C' está en la semirecta AB, luego no puede ser distinto del C. En cualquiera otra posición de C, D será un punto propio situado

entre A y B y, en consecuencia, se confundirá con D', luego, como antes, C y C' serán idénticos.

93. Hasta ahora no han sido aplicados los axiomas I, IV y V (*) del § **13**. Según el primero, las figuras AB y BA, en las cuales A y B son puntos propios, son congruentes. Se podrá, pues, prolongar el segmento AB por el lado de B hasta un punto propio C, tal que BA y BC y, por consiguiente, AB, BA, BC y CB sean figuras congruentes. En tal caso, el punto B recibe el nombre de punto medio del segmento AC (ó CA), y ningún otro punto B_1 de la recta AC tiene la propiedad de dar lugar á segmentos congruentes B_1A y B_1C. Para ver esto, observemos que, por ser las figuras AC y CA congruentes, se podrá tomar un punto B' de tal manera que ACB y CAB' sean congruentes; en cuyo caso, tanto B' como B estarán en el semirayo AC y, como AB y AB' son congruentes, B' será el mismo B, de donde se sigue que las figuras ABC y CBA son congruentes. Si también lo fuesen los segmentos B_1A y B_1C y, por consiguiente, B_1 estuviese en el segmento AC, las figuras $ABCB_1$ y $CBAB_1$ serían congruentes, resultado en contradición con el teorema 7.°, luego no puede ser B_1 distinto de B.

A B C

Designemos ahora por D el cuarto punto armónico de ACB y consideremos el D', tal que $ACBD$ y $CABD'$ sean figuras congruentes; la figura $CABD'$ deberá ser armónica, luego D' será el mismo D y $ABCD$ tendrá que ser congruente con $CBAD$, lo cual demuestra (**) que D no puede ser punto propio. Resulta, pues, que cuando se busca el punto armónicamente separado del punto medio de un segmento por los extremos de éste, se llega á un punto impropio.

94. *Todo segmento* FG *tiene un punto medio, cuya construcción resulta de los teoremas anteriores.* Tomemos, en efecto, fuera de la recta FG un punto propio cualquiera C; en el plano CFG existirá un punto propio determinado, D, que esté al mismo lado de la recta FG que el C y tal que las figuras FGC y GFD sean congruentes; escogiendo convenientemente el

(*) El axioma IV se utiliza en el § **15** y el V en el § **19**.
(**) Por el teorema 7.° del párrafo anterior—*(N. T.)*

punto C, será diferente del D. La congruencia en la cual son homólogos los pares FG, GF y CD puede extenderse á cualquier otro elemento de una manera bien determinada. El plano CFG y la recta FG son de coincidencia, luego para que sean D y D' puntos homólogos y, por tanto, FGC, GFD y FGD' figuras congruentes, debe estar D' en el plano CFG, pero sin que D y D' (por consiguiente C y D') estén á distintos lados de la recta FG, es decir, D y D' deben confundirse. En virtud de esto, tenemos aún D y C como puntos homólogos y CF y DG, DG y CF, CG y DF, y DF y CG como pares de rectas homólogas, mientras que CD se corresponde consigo misma. Puesto que las semirectas FC y FD están al mismo lado de la recta FG, la semirecta FD estará entre las FC y FG (con lo cual la GC entre la GF y GD), ó la FC estará entre las FD y FG (y, en este caso, la GD entre las GC y GF). Supongamos que ocurre lo primero; entonces CG y DF se cortan en un punto propio A (*), homólogo de sí mismo, y que pertenece á los segmentos CG y DF, y al mismo tiempo es evidente que las semirectas FD y FG están del mismo lado de la recta CF. Hasta aquí sólo se han presentado elementos propios; sin embargo, las rectas CF y DG tienen común un punto B que no necesita ser propio. El punto B y, por tanto, la recta AB se corresponden consigo mismos. Los puntos D y F están á distintos lados de esta recta y los D y G al mismo lado, luego los F y G á distintos lados; por consiguiente, AB y FG se encuentran en un punto propio H. También este punto es homólogo de sí mismo, luego es punto medio del segmento FG.

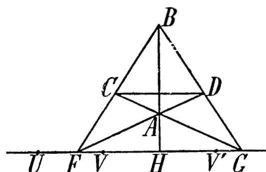


Fig. 43.

Aún existe en la recta FG otro punto de coincidencia, pero es un punto impropio, á saber, el K, intersección de las rectas CD y FG, cuarto armónico de FGH. En la recta AB, todos los puntos son de coincidencia; pero, fuera de éstos y del K, ninguno otro se corresponde consigo mismo.

(*) Según la definición dada en el número **19**.—(*N. T.*)

95. Sean F y G dos puntos armónicamente separados por los H y K. Si también lo están por los U y V y el V, por ejemplo, pertenece al segmento FG, los puntos F y K estarán separados por los G y U, ó lo estarán los G y K por los F y U. Si ocurre lo primero, según lo dicho en el § **11** (**68**), también estarán separados F y H por G y V, esto es, V será punto del segmento FH, luego el punto homólogo V' pertenece al segmento GH, y una parte del segmento GV (§ **1**, Def. 1.ª y T. 2.°), la GV' es congruente con FV. Resulta, pues, que *si los puntos propios* F, G, U *y* V *son armónicos y el* F *está entre los* U *y* G, *el segmento* FV *es menor que el* GV.

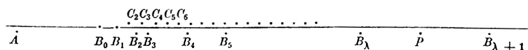
Se dice que un segmento es menor que otro, cuando aquél es congruente con una parte de éste. Sean AB y CD dos segmentos de una recta, congruentes, estando C situado entre A y B y D en la semirecta CB, por ejemplo, y determinemos el punto propio C', tal que las figuras ABC y DCC' sean congruentes. Los segmentos CB y CC' son, entonces, congruentes, y C' está entre C y D, por consiguiente, en la semirecta CD; luego B se confunde con C', entre C y D. Con esto está demostrado que ningún segmento es congruente con una de sus partes. Si, pues, se dan dos segmentos AB y CD, puede ocurrir que los dos sean congruentes, ó que AB sea menor que CD (CD mayor que AB), ó mayor que CD, y cualquiera de estos casos implica la imposibilidad de los otros dos.

Si el segmento I es menor ó mayor que el segmento II, también es, respectivamente, menor ó mayor que todo segmento congruente con el II. Si el segmento I es menor que el segmento II y éste es menor que el segmento III, el segmento I es menor que el III. Si el segmento I consta de las partes 1 y 2, el segmento II de las partes 3 y 4 y 1 es menor que 3 y 2 no es mayor que 4, I es menor que II.

§ 15.—Deducción de algunos teoremas gráficos

96. Vamos á utilizar ahora la teoría de las figuras congruentes, para deducir los teoremas fundamentales de la Geometría proyectiva. Al hacerlo, conservaremos el convenio, según el cual todos los elementos que intervienen en el razonamiento forman una figura.

Sean A, B_0, B_1 y P cuatro puntos dados sobre una recta, estando el B_1 entre A y P, y el B_0 entre A y B_1. De los A, B_0 y B_1 se deducen nuevos puntos B_2, B_3, B_4 ..... construyendo las figuras armónicas $AB_1B_0B_2$, $AB_2B_1B_3$, $AB_3B_2B_4$, ... Prolonguemos, por último, el segmento B_0B_1 el B_1C_2 congruente con él, éste el también congruente C_2C_3, éste el C_3C_4, etcétera. Si B_2 pertenece al segmento AP (por consiguiente, al



B_1P), B_1B_2 será mayor que B_0B_1, luego mayor que B_1C_2 y, por tanto, AB_2 será mayor que AC_2. Si B_3 pertenece también al segmento AP (por consiguiente, al B_2P), B_2B_3 será mayor que B_1B_2, con lo cual también mayor que C_2C_3, luego AB_3 será mayor que AC_3. Si también B_4 pertenece al segmento AP (por consiguiente, al B_3P), B_3B_4 será mayor que B_2B_3, con lo cual también mayor que C_3C_4, luego AB_4 será mayor que AC_4; y así sucesivamente. Ahora bien, según lo dicho en el Axioma IV del § **13**, en la serie de los segmentos B_1C_2, C_2C_3, ... hay uno determinado, C_nC_{n+1}, que contiene al punto P (en caso nece-

sario, se toma B_1 por C_1). De aquí se sigue que, en la serie de puntos $B_2 B_3 B_4$ ....., hay uno determinado, $B_{\lambda+1}$, al que solo le preceden puntos del segmento AP, pero sin pertenecer él mismo á este segmento; el B_λ se confunde, entonces, con el P, ó está separado del $B_{\lambda+1}$ por los A y P.

Esta consideración puede generalizarse de tal modo que sea aplicable á cualquier recta. Si A, B_0 y B_1 son puntos cualesquiera de una recta, se pueden deducir de ellos una serie de puntos $B_2 B_3 B_4$ ....., construyendo las figuras armónicas $AB_1B_0B_2$, $AB_2B_1B_3$, $AB_3B_2B_4$, ... Á la figura así constituída la daremos el nombre de red (*), y llamaremos primer punto de la red al B_1, segundo al B_2, ..., punto límite al punto A y punto cero al B_0. La red está determinada por su punto límite, su punto cero y el primer punto; podremos, pues, designarla, diciendo «red AB_0B_1». Como, por exclusión de A, está el punto B_1 entre los B_0 y B_2, el B_2 entre los B_1 y B_3, el B_3 entre los B_2 y B_4, ... y, por consiguiente, los B_1 y B_2 entre los B_0 y B_3, los B_2 y B_3 entre los B_1 y B_4, los B_1, B_2 y B_3 entre los B_0 y B_4, y, en general, los B_1, B_2, ..., $B_{\lambda-1}$ entre los B_0 y B_λ, no podrá coincidir B_λ con ninguno de los puntos A, B_0, B_1, ..., $B_{\lambda-1}$. *Los puntos de la red son, pues, diferentes del punto límite y entre sí.*

Si $A'B_0'B_1'B_\lambda'$ *es una serie proyección de la* $AB_0B_1B_\lambda$, *y* B_λ *es el* λ^{esimo} *punto de la red* AB_0B_1, *también* B_λ' *es* λ^{esimo} *punto de la red* $A'B_0'B_1'$.

97. Podemos aplicar esto á resolver el siguiente problema: Dados en una recta r tres puntos A, B_0 y B_n, hallar uno B_1 tal que el B_n sea n^{esimo} punto de la red AB_0B_1. Basta trazar por A *(fig. 44)* la recta s arbitraria, tomar en ella el punto M, en la B_0M el punto P_1, hallar el P_n como n^{esimo} punto de la red MB_0P_1 y proyectar el B_n desde P_n sobre s en N, y, por último, el N desde P_1 sobre r en B_1; B_1 *está determinado sin ambigüedad.*

Si sobre la recta r se da también el punto C_n, y se trata de hallar el C_1 tal que C_n sea el n^{esimo} punto de la red AB_0C_1, se proyecta C_n desde P_n sobre s en P, y éste desde P_1 sobre r en C_1. El examen de la figura hace ver que $AB_0B_nC_n$ se pro-

(*) Usado en el apéndice al *Cálculo baricéntrico* de Möbius, Segunda Parte, Capítulo VI.

yecta desde P_n en $AMNP$ y ésta, desde P_1, en $AB_0B_1C_1$. *Si, pues,* A *y* C_n *están separados por* B_0 *y* B_n, *también* A *y* C_1 *lo estarán por los* B_0 *y* B_1.

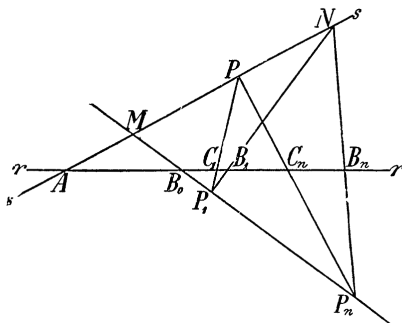


Fig. 44.

Tomemos ahora cuatro puntos cualesquiera A, B_0, B_1 y P en una recta, de modo que los A y B_1 estén separados por los B_0 y P. Se puede siempre proyectar la serie AB_0B_1P desde un punto propio H en una serie $A'B'_0B'_1P'_0$ de puntos propios,

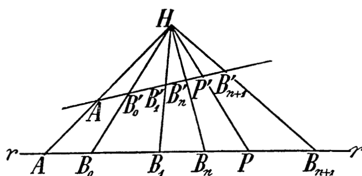


Fig. 45.

de manera que estén B'_1 entre A' y P' y B'_0 entre A' y B'_1; y en tal caso, tomar un número entero n, tal que el n^{esimo} punto B'_n de la red $A'B_0B_0B'_1$ se confunda con el P' ó esté separado del $(n+1)^{esimo}$ punto B'_{n+1} por los A' y P'. Si B'_n y B'_{n+1} se proyectan desde H sobre la recta AP en B_n y B_{n+1}, respectiva-

mente, á la red AB_0B_1 pertenecen: como n^{esimo} punto el B_n y como $(n+1)^{esimo}$ el B_{n+1}. Podemos, pues, decir:

Si, en una recta, los puntos A y B_1 están separados por los B_0 y P, se puede escoger el número entero positivo n, de tal modo que el n^{esimo} punto de la red AB_0B_1 se confunda con P ó esté separado del $(n+1)^{esimo}$ por los A y P. En este caso, también los puntos B_0 y B_{n+1} están separados por los A y P (*).

Este es un teorema gráfico, en cuya demostración se ha hecho uso del concepto de congruencia. Relacionándolo con otros teoremas gráficos, obtendremos nuevas propiedades, también gráficas, alguna de las cuales hallaremos en seguida.

98. Comencemos por ver cómo puede construirse la red AB_0B_1 en la recta r. Para ello, tracemos por A una recta cual-

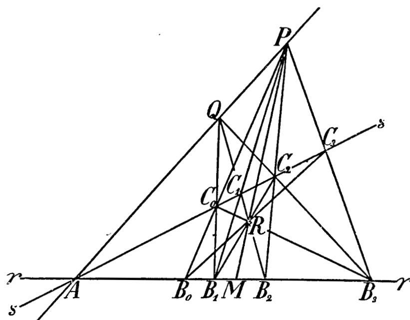


Fig. 46.

quiera s y tomemos un punto cualquiera P del plano rs, no situado en r ni en s. Si desde él se proyectan los puntos B_0 y B_1 sobre s en C_0 y C_1, la recta B_1 C_0 encontrará á la AP en un

(*) Esta proposición se conoce con el nombre de *forma proyectiva del postulado de Arquímedes.* Aquí ha sido demostrada, como teorema, mediante la admisión del postulado en su forma métrica. Véase sobre esto Schur, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig 1909; Klein, *Mathematische Annalen*, tomo L, 1898; Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.—*(N. T.)*

punto Q que, proyectado desde C_1 sobre r, da el punto B_2, segundo de la red AB_0B_1, puesto que la serie $AB_1B_0B_2$ es armónica. Si ahora se proyecta B_2 desde P sobre S en C_2, y Q desde C_2 sobre r en B_3, este será el tercer punto de la red. En general, si B_n es su n^{esimo} punto, se proyecta desde P sobre s en C_n y, en seguida, el Q desde C_n sobre r en B_{n+1}, y éste será el $(n+1)^{esimo}$ de la serie.

Designemos por R el punto de intersección de C_1B_2 con C_2B_1, y por M el de las rectas r y PR. Por ser armónicas las figuras $AB_2B_1B_3$ y $AC_1C_2C_0$, el punto B_3 se proyecta desde R sobre r en B_3, esto es, la recta C_0B_3 pasa por R. Del mismo modo, por ser armónicas $AB_1B_2B_0$ y $AC_2C_1C_3$, la recta B_0C_3 pasa, asimismo, por R. De aquí resulta, que no solo están armónicamente separados por A y M los puntos B_1 y B_2, sino también los B_0 y B_3. Las series B_1B_2A y B_0B_3A, tienen, pues, el mismo cuarto punto armónico.

99. Aquí halla lugar apropiado la definición de un concepto más general, al cual puede referirse el de red. Sean A, B, C, B' y C' puntos de una recta, tales que las series $BC'A$ y $CB'A$ tengan el mismo cuarto punto armónico M; diremos entonces que los pares BC y $B'C'$ son equivalentes respecto del punto límite A. Los puntos B, C, B' y C' deben ser diferentes del A, pero pueden no serlo entre sí; en este caso, si B' se confunde con el C, deberá tomarse éste como M, y del mismo modo, si C' se confunde con B, éste será el M. *Si* BC *y* B'C' *son equivalentes respecto de algún punto, los pares* BC' *y* CB' *no están separados* (**68**).

Si suponemos fijo el punto límite, se ve en seguida que todo par BC es equivalente á sí mismo; si dos pares BC y $B'C'$ son equivalentes, también lo son los $B'C'$ y BC, los CB y $C'B'$, los BB' y CC', etc.; y si B se confunde con C, también B' y C' coinciden.

El concepto de pares equivalentes, lo mismo que el de red, puede aplicarse á los haces de rectas ó planos. Los dos son conceptos gráficos y correlativos de sí mismos. Si son aplicables á una de dos figuras perspectivas, también lo son á la otra.

100. Sean BC y $B'C'$ dos pares de puntos de una recta r, equivalentes respecto del punto límite A, esto es, tales que las series $BC'A$ y $CB'A$ tienen el mismo cuarto punto armónico

M (ó que M coincide con C cuando B' y C se confunden, etc.). Tracemos por A una recta s y tomemos un punto cualquiera P del plano rs, no situado en r ni en s; si $B_1 C_1 B'_1 C'_1 M_1$ es la proyección de $BCB'C'M$ desde P_1 sobre s, y designamos por R el cuarto punto armónico de M, M_1 y P, tanto las rectas BC'_1 y $B_1 C'$ como las CB'_1 y $B'C_1$ deben concurrir en el punto R (*).

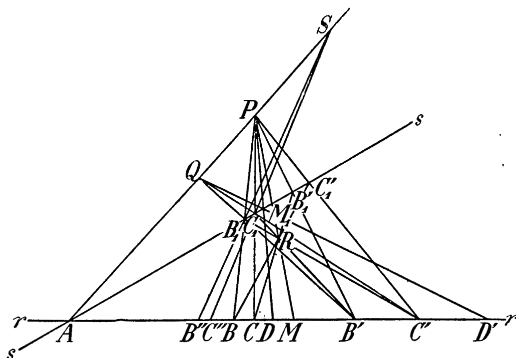


Fig. 47.

Ahora bien, si Q es el punto de intersección de las rectas $B'B_1$ y $C'C_1$ (suponiendo que sean diferentes), el haz formado por las rectas r, s, AR y AQ, y el de las r, s, AR y AP son armónicos, luego las rectas AP y AQ son una misma. Según esto, las rectas $B'B_1$ y $C'C_1$ tienen siempre un punto Q común con la AP.

De aquí se deduce, en primer término, que por sucesivas proyecciones se puede pasar de la figura $ABCB'C'$ á la

(*) Pues fijándonos en los BC'_1 y $B_1 C'$, por ejemplo, si B se confunde con C', con ellos se confunde también M, y, por tanto, las rectas BC'_1 y $B_1 C'$ son la misma AM, que contiene el punto R; y si B es diferente de C', la consideración del cuadrilátero formado por las rectas BB_1, $C'C'_1$, BC'_1 y CB'_1, que tiene dos vértices opuestos en B y C' y otros dos B_1 y C'_1 en una recta que pasa por A, demuestra (**63**) que AM es la tercera diagonal, la cual contiene el punto R de intersección de BC'_1 y $B_1 C'$, que es cuarto armónico de los M, M_1 y A.—*(N. T.)*

$AC'B'CB$; la primera se proyecta desde P en $AB_1C_1B'_1C'_1$ y ésta, desde Q, en $AC'B'CB$. *Si, pues, los pares de puntos* BC *y* B'C' *de una recta son equivalentes respecto del punto límite* A, *y los puntos* B *y* C' *están separados por los* A *y* B', *también lo estarán por los* A *y* C. Además, se obtiene la siguiente construcción del punto C' cuando se dan los A, B, C y B' de la recta r y la condición de que los pares BC y $B'C'$ han de ser equivalentes respecto de A. Se traza por A una recta s, y en el plano rs se toma un punto P arbitrario, fuera de las rectas r y s; se proyectan el par BC desde P sobre s en B_1C_1, el punto B_1 desde B' sobre AP en Q y, por último, el punto C_1 desde Q sobre r en C'. Con esto se ve también que el punto C' existe siempre y está completamente determinado.

101. Consideremos otros dos puntos D y D' sobre la recta r, tales que también los pares CD y $C'D'$ sean equivalentes respecto de A; en tal caso, las rectas PD y QD' se encuentran también en un punto de s, el D_1, y por consiguiente, también los pares BD y $B'D'$ son equivalentes. La figura $ABCD$ se proyecta desde P en $AB_1C_1D_1$, y ésta, desde Q, en $AB'C'D'$. *Si, pues, los pares de puntos* BC *y* B'C' *de una recta son equivalentes respecto del punto límite* A, *y lo mismo ocurre á los pares* CD *y* C'D', *también los pares* BD *y* B'D' *lo serán;* se puede, entonces, pasar de $ABCD$ á $AB'C'D'$ por sucesivas proyecciones, y *si los puntos* B *y* C *están separados por los* A *y* D, *también los* B' *y* C' *lo están por los* A *y* D'.

102. *Si los pares de puntos* BC *y* B'C' *de una recta son equivalentes respecto del punto límite* A, *y lo mismo ocurre á los pares* BC *y* B''C'', *también lo serán los pares* B'C *y* B''C''. Pues trazando por A una recta cualquiera s y tomando en el plano rs un punto P (fuera de r y de s), si desde él se proyecta el par BC sobre s en B_1C_1, las rectas $B'B_1$ y $C'C_1$ concurren en un punto Q de la recta AP, y del mismo modo las $B''B'_1$ y $C''C_1$ se encuentran en un punto S de esta recta AP, lo cual demuestra la verdad del enunciado.

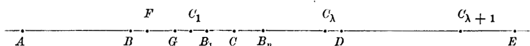
103. El concepto de red puede referirse al de equivalencia. Tomemos, por ejemplo, una red AB_0B_1 contenida en una recta, siendo A el punto límite, B_0 el punto cero y B_1 el primer punto, y llamemos B_2, B_3..... al segundo, tercero..... punto, respectivamente. En este caso, los pares B_0B_1 y B_1B_2 son equivalentes respecto de A; lo mismo ocurre á los B_1B_2

y B_2B_3, y así sucesivamente. De esta manera, los puntos B_2, B_3..... quedan determinados por completo cuando se dejan fijos los A, B_0 y B_1. Según el teorema precedente, los pares $B_\lambda B_{\lambda+1}$ y $B_\mu B_{\mu+1}$ son equivalentes respecto del punto límite A, cualesquiera que sean los valores enteros y positivos de λ y μ.

104. Todos los teoremas anteriores se han reunido con el fin de demostrar uno indispensable para fundamentar la Geometría proyectiva. La cuestión de que se trata se presenta cuando, partiendo de cuatro puntos A, B, C y D de una recta, por repetidas proyecciones se llega de nuevo á puntos de la misma. Puede ocurrir entonces que las últimas proyecciones de tres de los puntos dados se confundan con estos mismos; vamos á probar que, en tal caso, también coinciden el cuarto punto y su última proyección.

Suponemos, pues, que por sucesivas proyecciones se ha pasado de la figura $ABCD$ á la $ABCE$, y debemos probar que D se confunde con E.

Para ello, admitamos que D y E sean diferentes. Designando convenientemente los puntos, los A y C estarán separados por los B y D y, por tanto, también por los B y E. Por



exclusión de B, los puntos D y E están en tal caso entre A y C; luego, ó D está entre A y E ó E está entre A y D; supongamos que ocurre lo último, esto es, que A y D estén separados por B y E; por consiguiente, que también A y D y B y D lo están por C y E. Construyamos ahora el par BB_1, equivalente al DE, respecto del punto límite A; en tal caso, B y E estarán separados por A y B_1, pero A y B no lo estarán por B_1 y C. Si se construye, pues, la red ABB_1, se llega siempre á un punto B_n (siendo n un número entero y positivo, que puede ser la unidad), que está separado de B por A y C; se puede entonces determinar el punto C_1 de manera que C resulte como n^{esimo} punto de la red ABC_1 (C_1 puede confundirse con C), y los puntos A y C_1 estarán separados por los B y B_1; además (si C es diferente de C_1), también lo están los A y C_1 por los B_1 y C; luego, en todo caso, lo están los A y C_1 por los B y D. Continuemos la construcción de la red ABC_1 hasta llegar á un

punto C_λ que se confunda con el D ó esté separado del $C_{\lambda+1}$ por los A y D, con lo cual los pares BC_1 y $C_\lambda C_{\lambda+1}$ serán equivalentes respecto del punto límite A; finalmente, construyamos los pares BF y GC_1, equivalentes al $C_\lambda D$, respecto de aquel mismo punto límite. (Si C_λ no es diferente de D, los B y F, así como los C_1 y G, se confunden). Los teoremas antes expuestos muestran que los pares FC_1 y $DC_{\lambda+1}$ son equivalentes, y como también lo son BG y FC_1, lo serán BG y $DC_{\lambda+1}$; además (si C_λ es diferente de D), B y C_1 están separados por A y F, luego también por A y G; por consiguiente, siempre lo están B y B_1 por A y G y, además, D y E por A y $C_{\lambda+1}$, de donde se sigue que también lo están A y D por B y $C_{\lambda+1}$ y A y $C_{\lambda+1}$ por B y E. Ahora bien, si las proyecciones á que, según la hipótesis hecha, se han sometido los puntos A, B, C y D se extienden á toda la figura $ABCDC_1C_{\lambda+1}$, se llegará nuevamente á la recta dada, correspondiéndose consigo mismos los puntos A, B y C, según lo cual lo mismo ocurre á los C_1 y $C_{\lambda+1}$, mientras que el punto D se había admitido que era diferente del E. Como consecuencia de esta hipótesis resulta que B y $C_{\lambda+1}$, que, según lo anterior, están separados por A y D, lo estarían por A y E y, al mismo tiempo, lo estarían A y $C_{\lambda+1}$ por B y E, lo cual demuestra que la hipótesis hecha es inadmisible.

El mismo procedimiento de demostración puede ser aplicado al siguiente teorema: *Si cada una de las figuras* ABCD *y* ABCE *está compuesta de cuatro elementos, diferentes entre sí, de una serie de puntos, de un haz de rectas ó de un haz de planos, y las dos tienen comunes todas las propiedades gráficas, los elementos* D *y* E *coinciden.*

105. *Dados en una recta tres puntos cualesquiera* A, B *y* C, *de ellos puede pasarse siempre á otros tres* A_1, B_1 *y* C_1 *de la misma ó de otra recta, por medio de una ó varias proyecciones.* Si las rectas AB y A_1B_1 son diferentes, pero sin que ABC y $A_1B_1C_1$ sean perspectivas (*), y A_1, por ejemplo, no está

(*) En el caso de ser perspectivas las dos series ABC y $A_1B_1C_1$, la proposición es evidente. Para los otros casos conviene advertir que las construcciones aquí indicadas no son las únicas que conducen al fin deseado, sino que pueden idearse infinidad de ellas, siendo, acaso, las expuestas las más sencillas de todas.—*(N. T.)*

en AB, se traza por A_1 una recta que corte á la AB (pero no en A), y sobre ella se proyecta la serie ABC desde un punto de AA_1; la proyección $A_1B'C'$ así obtenida y la figura $A_1B_1C_1$ son, en tal caso, perspectivas. Si las rectas AB y A_1B_1 están confundidas, y $A_2B_2C_2$ es una proyección cualquiera de ABC, se puede pasar de $A_2B_2C_2$ á $A_1B_1C_1$ por una ó dos proyecciones.

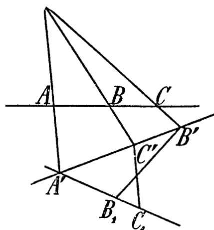


Fig. 48.

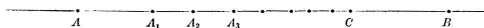
106. Si A, B, C y D son cuatro puntos de una recta, diferentes entre sí, y lo mismo ocurre á los A', B', C' y D', y las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ tienen todas sus propiedades gráficas comunes, se podrá pasar de la una á la otra por medio de una ó varias proyecciones. En efecto; según acabamos de ver, de los puntos A', B' y C' puede pasarse á los A, B y C mediante una ó varias proyecciones. Apliquémoslas simultáneamente al punto D' y sea E el que así se halla. Si D y E fuesen diferentes, operando como antes, se podrán hallar dos puntos C_1 y $C_{\lambda+1}$, tales que C sea el n^{esimo} y $C_{\lambda+1}$ el $(\lambda+1)^{esimo}$ de la red ABC_1, y otros dos C_1 y $C'_{\lambda+1}$ tales que C' sea el n^{esimo} y $C'_{\lambda+1}$ el $(\lambda+1)^{esimo}$ punto de la red $A'B'C'_1$; la consideración de la red ABC_1 hace ver que los puntos B y $C_{\lambda+1}$ están separados por los A y D, y los A y $C_{\lambda+1}$ lo están por los B y E, y de la consideración de la red $A'B'C'_1$ se deduce que los puntos B' y $C'_{\lambda+1}$ están separados por los A' y D'; pero, según esto, también los B y $C_{\lambda+1}$ deben estar separados por los A y E, cosa imposible, pues de lo antes dicho se sigue que los A y $C_{\lambda+1}$ están separados por los B y E.

El recíproco de este teorema será demostrado en el artículo **17.**

107. Hagamos ahora algunas observaciones sobre la siguiente interesante cuestión: ¿Se podrían demostrar los nuevos teoremas gráficos á que hemos llegado, sin el concurso de concepto de congruencia? Este concepto ha sido aplicado en la demostración del teorema que dice: Si A, B_0, B_1 y P son

puntos propios dados en una recta, estando el B_1 entre los A y P y el B_0 entre los A y B_1, se puede hallar un número entero y positivo λ, tal que al $(\lambda + 1)^{esimo}$ punto de la red AB_0B_1 solamente le precedan puntos del segmento AP y que él mismo no pertenezca á este segmento. Se podría establecer este teorema independientemente del concepto de congruencia apoyándose en el siguiente axioma:

«Si en un segmento rectilíneo AB se pueden fijar puntos A_1, A_2, A_3, ... en número indefinido, tales que estén A_1 entre A y B, A_2 entre A_1 y B, A_3 entre A_2 y B, etc., en él exis-



tirá un punto C (que puede coincidir con B) tal que de cualquier modo que se tome un punto D entre A y C, no todos los puntos de la serie $A_1A_2A_3$ ..... estén entre A y D, pero ninguno de ellos esté entre C y B (*).»

Tomemos, en efecto, sobre una recta los puntos propios A, B_0, B_1 y P, de manera que estén B_1 entre A y P y B_0 entre A y B_1, con lo cual B_1 estará entre B_0 y P, y construyamos la red AB_0B_1. Si los puntos B_2, B_3, ... de la red AB_0B_1



fuesen todos del segmento AP, estarían: B_2 entre B_1 y P; B_3 entre B_2 y P, y así sucesivamente, y existiría un punto C (que puede coincidir con P) en el segmento AP, tal que, como en la recta AP se puede tomar el punto D entre los A y C, no todos los puntos de la red estuviesen entre A y D, y ninguno de ellos estuviese entre C y P; el punto D puede ser escogido de manera que CD y B_1B_0 sean pares equivalentes respecto del punto límite A, con lo cual C y B_0 estarían separados por A

(*) Se ve claramente que esto no es otra cosa que el concepto de límite, tomado del Análisis, expresado con lenguaje geométrico. Esta es la razón de que al punto C se le llame *punto límite* de la serie $A_1A_2A_3$ ....., concepto introducido por Klein (véase el lugar citado más adelante) para remediar la insuficiencia de la demostración de Staudt.

Como muy bien hace observar el autor, la existencia del punto límite no es evidente, por lo cual se prefiere modernamente hacer uso del concepto de congruencia, para lograr el fin que acabamos de indicar.—*(N. T.)*

y B_1 y, por tanto, también por A y D, es decir, D estaría situado entre A y C. Entre C y D se podrían tomar dos puntos sucesivos B_n y B_{n+1} de la red AB_0B_1; los pares B_0B_1 y B_nB_{n+1} serían equivalentes respecto del punto límite A, lo mismo que los B_0B_1 y DC, luego también lo serían los DC y B_nB_{n+1}; además, los puntos D y B_{n+1} estarían separados por los A y B_n y, por consiguiente, también por los A y C, esto es, C se hallaría entre D y B_{n+1} y, sin embargo, también B_{n+1} entre C y D.

El axioma que sirvió á F. Klein para llenar el vacío que dejó Staudt (*) al fundamentar la proyectividad (**) puede deducirse del teorema que acabamos de formular. El admitir éste como axioma, no estaría de acuerdo con la manera de ver á que venimos ateniéndonos, pues, aparte que no hay observación que pueda referirse, en general, á un número indefinido de cosas, no es admisible aquel teorema desde nuestro punto de vista, porque no podemos (**12**) admitir infinitos puntos en un segmento sin dar á la palabra «punto» una generalización mayor que la que hasta ahora tenía, y sin alejarnos, por consiguiente, aún más de su primitivo significado. Tal generalización se hace necesaria cuando se quieren considerar los puntos de las rectas en completa analogía con los términos de la serie compuesta por los números reales, racionales é irracionales; en tal caso, resulta mediante una definición apropiada, á la que se une aquella proposición como teorema (***).

(*) *Mathem. Ann.*, 1873, tomo VI, pág. 136; 1874, tomo VII, pág. 532. Véase también: Cantor, *Mathem. Ann.*, 1872, tomo V, pág. 123; Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, 1872, pág. 18.—*(N. A.)*

(**) Staudt, *Geometrie der Lage*, 1847, pág. 50. Véase también: Thomae, *Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung*, 1873, página 12; Reye, *Die Geometrie der Lage*, Primera parte, prólogo de la 2.ª edición, 1877; Klein, *Mathem. Ann.*, 1973; tomo VI, pág. 531; 1880, tomo XVII, pág. 52; Darboux, *Mathem. Ann.*, 1880, tomo XVII, pág. 55; Schur, *Mathem. Ann.*, 1881, tomo XVIII, pág. 252.—*(N. A.)*

(***) Véase el final del § **23**

Adición al § 15.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1887, tomo XXX, pág. 128.)

En el § **10** (**56**) designamos como conceptos primitivos de la Geometría proyectiva los siguientes: punto, recta y plano como elementos, tomando estas palabras en su acepción ampliada; incidencia de dos elementos de distinta naturaleza y separación de dos pares de elementos en una figura de primera categoría. Para la formación de estos conceptos han bastado los axiomas establecidos en los dos primeros artículos (con el complemento indicado en la adición al § **1**). Los conceptos primitivos de la Geometría proyectiva son, pues, independientes, no sólo de la «congruencia» y del «paralelismo», sino también de cualquier axioma que se establezca para llenar la laguna existente en el fundamento de la proyectividad dado por Staudt.

Muy diferente es lo que ocurre con los teoremas de la Geometría proyectiva; éstos pueden referirse á un grupo de principios fundamentales (**77**). Los principios fundamentales de la Geometría proyectiva están contenidos en los §§ **12** y **16**; los enunciados en el § **12** (**73** y siguientes) se derivan de los §§ **7**, **8** y **9**; de los dos que se enuncian en § **16** (**108**), el uno es correlativo del otro ya obtenido en el § **15** (**97**). Los medios que sirvieron para obtener los conceptos primitivos de la Geometría proyectiva bastan también para la demostración de los principios fundamentales de ésta, salvo el demostrado en el § **15**; éste es de naturaleza esencialmente diferente que los demás, y no podía demostrarse sin aumentar previamente los recursos auxiliares. La geometría proyectiva se hace así depender de la congruencia, pero queda independiente del paralelismo.

Si, para expresar la idea de una continuidad en la serie rectilínea, se establece un axioma, por ejemplo, en la forma dada en el núm. **107**, nos separamos de la condición que desde el principio nos impusimos, según la cual es preciso que los conceptos fundamentales y los axiomas de la Geometría sean tomados directamente de la experiencia y que todos los

restantes conceptos y teoremas puedan referirse exclusivamente á éstos. Debe, por consiguiente, la Geometría proceder desde un principio como ciencia que describe fenómenos naturales y conservar este carácter hasta en sus más complicadas concepciones. Véase sobre esto: Prólogo, Introducción; § **1**, números **1**, **2**, **3** y **12**; § **2**, núm. **13**; § **6**, núm. **33**; § **12**, núm. **77**; § **15**, núm. **107**. Véase también: H. Vogt, *Der Grenzbegriff in der Elementarmathematik*, Breslau, 1885 (Programa núm. 157).

§ 16.—Figuras de primera categoría proyectivas (*)

108. Vimos en el § **12** que todos los teoremas gráficos á que por entonces podíamos llegar son consecuencia de los de igual naturaleza contenidos en los §§ **7**, **8** y **9**, y para la parte de Geometría de la posición por ellos limitada, se dedujo la existencia de las tres leyes de correlación de la circunstancia de ser permutables entre sí las palabras «punto» y «plano» en los teoremas fundamentales.

Lo dicho en el artículo anterior amplía el campo de nuestras investigaciones y permite agregar al grupo de aquellos teoremas los dos siguientes:

Si sobre una recta los puntos A *y* B_1 *están separados por los* B_0 *y* P, *se puede hallar un número entero y positivo* n, *tal que el* n^{esimo} *punto de la red* AB_0B_1 *coincida con* P *ó esté separado del* $(n + 1)^{esimo}$ *por los* A *y* P; *y si en un haz de planos los rayos* A *y* B_1 *están separados por los* B_0 *y* P, *se puede hallar un número entero y positivo* n, *tal que el* n^{esimo} *plano de la red* AB_0B_1 *se confunda con* P *ó esté separado del* $(n + 1)^{esimo}$ *por los* A *y* P.

El grupo así ampliado conserva la propiedad de ser permutables entre sí las palabras «punto» y «plano»; y como dentro de la Geometría gráfica no iremos en lo sucesivo más allá de lo que con la ayuda del grupo de teoremas fundamen-

(*) Adoptamos la denominación de figuras de primera categoría aplicada por Staudt, generalmente seguida en España, en lugar de la de figuras uniformes que usa el autor.—*(N. T.)*

tales así ampliado puede obtenerse, resulta ya ahora suficientemente demostrada para nuestros fines la correlación entre puntos y planos y, por consiguiente, también la correlación entre puntos y rectas de un plano y entre planos y rectas que pasan por un punto. Las tres leyes de correlación son, pues, aplicables á todos los teoremas gráficos del precedente artículo, pareciendo innecesario citar separadamente cada uno de los teoremas á que tal aplicación daría lugar.

109. Hemos considerado últimamente series rectilíneas tales que puede pasarse de una á otra por medio de sucesivas proyecciones; las series que cumplen esta condición se llaman proyectivas. Lo dicho en el § **15** permite enunciar, desde luego, los dos teoremas siguientes:

Si las series ABCD *y* A′B′C′D′ *son proyectivas y los puntos* A *y* B *están separados por los* C *y* D, *también los* A′ *y* B′ *lo están por los* C′ *y* D′.

Si las series ABCD *y* ABCE *son proyectivas, los puntos* D *y* E *coinciden.*

Los elementos de una de dos series proyectivas pueden ser ordenados arbitrariamente, pero la disposición dada á los de uno de ellas determina, en general, la que han de tener los de la otra.

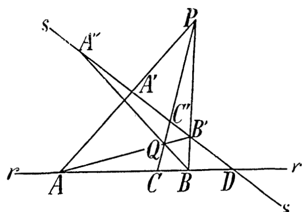


Fig. 49.

Dos series compuestas del mismo número de puntos, no superior á tres, son siempre proyectivas, de cualquier modo que se ordenen sus elementos (*).

Consideremos ahora cuatro puntos, A, B, C y D en una recta r. Por el punto D tracemos una recta s, y tomemos un punto P en el plano de las dos rectas r y s, exterior á ambas; si desde él se proyecta la figura ABC sobre s en

(*) Esta propiedad, evidente para series de un solo punto, ha sido demostrada en el núm. **105** para las de tres puntos y, por consiguiente, también para las de dos.—*(N. T.)*

$A'B'C'$, y se designa por Q el punto de intersección de AB con CC', la serie $ABCD$ se proyecta desde P sobre s en $A'B'C'D$, ésta desde A sobre CC' en $PQC'C$ y, por último, ésta desde B' sobre r en $BADC$. Por consiguiente, *las figuras* ABCD *y* BADC *y, más general, las* ABCD, BADC, CDAB y DCBA *son proyectivas.*

Puesto que de los cuatro puntos A, B, C y D, dos de ellos separan á los otros dos, supongamos que los A y B, por ejemplo, separan á los C y D. *Si* ABCD *es una figura armónica, también son proyectivas* ABCD, BACD, ABDC, CDBA *y* DCAB. Recíprocamente: Si $ABCD$ y $BACD$ son proyectivas, también lo son $A'B'C'D'$ y $BACD$, luego, designando por A'' el punto de intersección de s y BQ, las series $A'B'C'D'$ y $A''B'C'D'$ son proyectivas, esto es, A'' se confunde con A' y la serie $ABCD$ es armónica. *Si la serie* ABCD *no es armónica, ninguna de las* BACD, ABDC, CDBA *y* DCAB *es proyectiva con ella.* Quedan aún otras 16 permutaciones, de las que pueden formarse con los puntos A, B, C y D; pero como ni los A y C están separados por los B y D, ni los A y D lo están por los B y C, la serie $ABCD$ nunca será proyectiva con ninguna de éstas 16 permutaciones.

110. Los puntos A, A'; B, B'; C, C'; ..... de dos series proyectivas ABC..... y $A'B'C'$ ...,. se llaman homólogos; y si dos puntos homólogos coinciden, se dice que las dos series tienen este punto correspondiente común (*). Cada dos partes homólogas de las dos series son proyectivas. Si tres puntos son de coincidencia, lo son todos.

Sean s y s' series proyectivas compuestas de tres puntos, al menos, cada una, los cuales fijamos en un orden determinado, y designemos por r y r', respectivamente, sus bases (que no necesitan ser diferentes una de otra). Sea D un punto cualquiera de r. Si pertenece á la serie s, le corresponde un punto de r', completamente determinado, como homólogo en la serie s'. Si no pertenece á la serie s, se le considera agregado á ella y, por medio de uno cualquiera de los sistemas de proyecciones que conducen de s á s', se amplía la serie s' con el punto D', tal que las figuras ampliadas continúen siendo proyectivas y, entonces, también D' es un punto de r' com-

(*) Véase la nota del núm. **57.**—*(N. T.)*

pletamente determinado. En ambos casos podemos, pues, decir que D y D' son puntos homólogos en la relación proyectiva (proyectividad) dada entre s y s' y, en este sentido, á cada punto de la recta r corresponde uno, y sólo uno, homólogo en la r'.

Para establecer una relación proyectiva entre dos series, se pueden elegir arbitrariamente los puntos de una de ellas homólogos de tres dados en la otra; pero una vez fijados los tres pares, la relación proyectiva queda completamente determinada.

111. Las series, los haces de rectas y los haces de planos se llaman figuras de primera categoría (figuras fundamentales de primera categoría). Si dos figuras de primera categoría son perspectivas ó entre ellas se pueden intercalar un cierto número de figuras también de primera categoría de tal modo que después de la intercalación cada dos consecutivas sean perspectivas, aquéllas reciben el nombre de proyectivas, y á ellas son aplicables todas las expresiones que para las series que acabamos de definir.

Toda figura de primera categoría es proyectiva consigo misma. Dos figuras de primera categoría, proyectivas con una tercera, son proyectivas entre sí. Si las figuras de primera categoría ABCD *y* A'B'C'D' *son proyectivas, y sus elementos* A *y* B *están separados por los* C *y* D, *también lo están los* A' *y* B' *por los* C' *y* D'. *Cada dos partes homólogas de dos figuras de primera categoría proyectivas son proyectivas.* Todos los teoremas antes enunciados para las series pueden generalizarse sencillamente.

Dos figuras de primera categoría compuestas del mismo número de elementos, no superior á tres, son siempre proyectivas. Tres pares de elementos homólogos determinan por completo una relación proyectiva entre dos figuras de primera categoría, de tal modo que á cada elemento que pueda considerarse como formando parte de la primera corresponde uno, y sólo uno, homólogo en la otra.

Si de dos figuras uniformes proyectivas una es armónica, también lo es la otra. Dos figuras armónicas cualesquiera son proyectivas. Según esto, la figura armónica $ABCD$ es proyectiva con las $BADC$, $CDAB$, $DCBA$, $BACD$, $ABDC$, $CDBA$ y $DCAB$, pero no lo es con ninguna de las 16 restantes permutaciones de sus elementos. Por el contrario, *si ninguna de*

las permutaciones de la figura uniforme ABCD *es armónica, las* BADC, CDAB *y* DCBA *son proyectivas con la* ABCD, *pero ninguna otra de las 20 restantes permutaciones lo es.*

Las figuras de primera categoría perspectivas son proyectivas. Recíprocamente: *Si dos figuras uniformes están relacionadas proyectivamente y tres pares de elementos homólogos se hallan en posición perspectiva, los dos figuras son perspectivas* (*).

112. Las series de la misma base, los haces de planos de la misma arista y los haces de rectas concéntricos y situados en el mismo plano se dice que están superpuestas ó que tienen la misma base (**).

Dos figuras de primera categoría, no superpuestas, proyectivas, que tienen un elemento de coincidencia, son siempre perspectivas.

Si dos figuras de primera categoría proyectivas ABC..... y $A'B'C'$..... tienen la misma base, podrá ocurrir que sean homólogos no sólo A y A' (los cuales deben ser, en esta consideración, diferentes uno de otro), sino también A' y A, es decir, que $AA'BC$ y $A'AB'C'$ sean proyèctivas. Entonces, B' y B son asimismo homólogos, puesto que $AA'BB'$ y $A'AB'B$ son proyectivas, y los elementos homólogos pueden ser permutados entre sí. Se dice que tales figuras están en involución, ó que los pares AA', BB', CC', ... forman una involución; los elementos de cada par se llaman conjugados y son permutables entre sí. Dos pares determinan la involución, es decir, el conjugado de cada elemento, y pueden ser elegidos arbitrariamente.

113. El problema de: Dados dos pares de una involución, construir el conjugado de un elemento conocido, nos da ocasión de completar la consideración hecha

(*) Pues fijándonos, por ejemplo, en el caso de dos series ABC ..... y $A'B'C'$, si las rectas AA', BB' y CC' pasan por un punto O, los haces O (ABC.....) y O ($A'B'C'$ .....) son proyectivos y tienen tres rayos de coincidencia, luego todos los demás también son de coincidencia, es decir, las dos series son secciones del mismo haz.—*(N. T.)*

(**) Usaremos indistintamente ambas denominaciones, correspondientes á las aufeinanderliegenden y vereignite Lage que usa el autor, entendiendo como base del haz de planos su arista, y del haz de rectas no sólo su plano, sino también su vértice.—*(N. T.)*

al final del § **10**. Cortábamos allí los lados de un cuadrivértice completo $ABCD$ por una recta, obteniendo así los puntos F, G, H, F_1, G_1 y H_1 de intersección con BC, CA, AB, AD, BD y CD, respectivamente, y demostramos entonces que el sexto punto queda determinado por los restantes; ahora podemos hacer ver que FF_1, GG_1 y HH_1 son pares de una involución, esto es, que *los tres pares de lados opuestos de un cuadrivértice completo son cortados por cada recta de su plano en pares de puntos de una involución*. En efecto; la serie $FGHH_1$ es una sección del haz de rectas $B(CGAH_1)$, es decir, del haz que forman las rectas BC, BG, BA y BH_1, y la serie $F_1G_1H_1H$ es una sección del haz $A(DG_1H_1B)$; y como estos dos haces son perspectivos con el $H_1(CGAB)$ ó, lo que es lo mismo, $H_1(DG_1AB)$, las series $FGHH_1$ y $F_1G_1H_1H$ son proyectivas, luego los pares FF_1, GG_1 y HH_1 pertenecen á una involución.

La construcción aplicada en el núm. **61** da, pues, el medio de hallar el punto H_1 conjugado del H en la involución definida por los pares FF_1 y GG_1; pudiendo pasarse fácilmente de este caso á los de haces de rectas ó de planos. También aparece ahora claro que pueden permutarse en aquella construcción F con F_1, ó G con G_1.

Si en una involución hay dos pares separados uno por otro, la misma posición relativa tendrán dos pares cualesquiera. Pues si los elementos A y A' están separados por los B y B', uno de éstos, por ejemplo, el B, estará entre los A y A' por exclusión de C, pero no el otro, B'; luego el par AA' estará seguramente separado por el BC, pero no por el BC', puesto que $AA'B'C$ y $A'ABC'$ deben ser figuras proyectivas, de donde se sigue que A y A' están separados por C y C', y lo mismo B y B' por C y C', etc.

114. En las figuras proyectivas de la misma base, los elementos correspondientes consigo mismos se llaman también de coincidencia (*). *Los pares de elementos* AA', BB', CC'..... *de una figura de primera categoría armónicamente separados por dos elementos fijos* F *y* G, *forman una involución cuyos elementos de coincidencia son* F *y* G. Pues, según lo dicho en

(*) El autor los llama dobles, denominación que no hay inconveniente en utilizar cuando la proyectividad es involutiva. Véase la nota del núm. **57**.—*(N. T.)*

el § **11** (**68**), $FGA'B$ y $FGAB'$, $FGAB$ y $FGA'B'$ son figuras proyectivas, de donde se deduce la proyectividad de $FGAA'B$ y $FGA'AB'$, y, más general, de $FGAA'BC$..... y $FGA'AB'C'$..... Recíprocamente: *Si* A *y* A′ *son elementos conjugados de una involución que tiene los elementos de coincidencia* F *y* G, *la figura* FGAA′ *es armónica;* pues, en tal caso, las figuras $FGAA'$ y $FGA'A$ son proyectivas. Además, resulta (**68**) que: *Si* AA′ *y* BB′ *son pares de una involución con dos elementos de coincidencia, no estarán separados uno por otro.*

Según esto, no en todas las involuciones y, por consiguiente, no en todas las proyectividades entre figuras superpuestas, existen dos elementos de coincidencia (*). Pero, *si dos figuras uniformes proyectivas* ABC..... *y* A′B′C′..... *son de la misma base y tienen un elemento de coincidencia* F, *tendrán también* (con una excepción que en seguida indicaremos) *un segundo elemento de coincidencia.* Sean, en efecto, A y B dos elementos que no coinciden con sus homólogos (**), en cuyo caso los pares AB' y BA' determinan una involución, y sea G el elemento conjugado en ella del F; las figuras $FGAB$ y $GFB'A'$ serán, pues, proyectivas y, por consiguiente, también lo serán las $FGAB$ y $FGA'B'$, luego G es también elemento de coincidencia de la proyectividad dada. Observemos, con este motivo que: *Si en una figura de primera categoría* FGAB *y* FGA′B′ *son proyectivas, los pares* FG, AB′ *y* A′B *pertenecen á una involución, y recíprocamente;* y entonces, también $FGAA'$ y $FGBB'$ son proyectivas.

Para que las figuras de primera categoría de la misma base proyectivas ABC..... y $A'B'C'$....., con un elemento de coincidencia F, no tengan ningún otro de esta especie, es preciso que F sea al mismo tiempo conjugado consigo mismo en la involución determinada por los pares AB' y BA' (esto es, que $FAB'B$ y $FB'AA'$ sean proyectivas). En tal caso, si M es el cuarto elemento armónico de ABF (con lo cual $FAB'M$ y $FB'AM$ son proyectivas y, por consiguiente, también lo son $FMAB'B$ y $FMB'AA'$), será el otro elemento de coincidencia

(*) Véase más adelante el § **23**.

(**) Es preciso suponer, además, que A y B son diferentes de B' y A', respectivamente, cosa siempre posible.—*(N. T.)*

de aquella involución, luego, á la vez, el cuarto elemento armónico de $B'AF$, es decir, que los pares AB y $A'B'$ son equivalentes respecto del elemento límite F, y lo mismo ocurre á los pares AC y $A'C'$, etc. Por esto, llamaremos á una relación de esta naturaleza equivalencia respecto del elemento límite F; tal relación no es involutiva. Para su determinación hay que dar, además del elemento límite F, dos elementos homólogos A y A'; entonces, construyendo A'' como cuarto armónico de $A'FA$, los pares AA' y $A'A''$ son equivalentes respecto del elemento límite F, y se tienen ya tres pares FF, AA' y $A'A''$ para determinar la relación proyectiva.

115. Si en una recta r (*) se da una relación proyectiva, pero no involutiva, entre dos series s y s_1, y al punto B de la recta r, que no es de coincidencia, corresponde en la relación ss_1 el punto C y en la s_1s el A, los puntos A y C son dife-

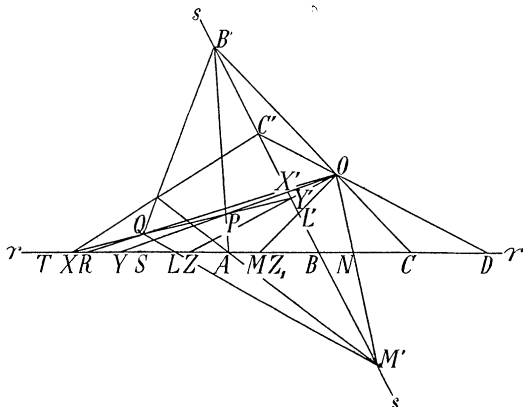


Fig. 50.

rentes, no sólo de B, sino también entre sí. Si, pues, C y D son puntos homólogos en la proyectividad ss_1, ésta queda de-

(*) Véase *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, tomo XCI, pág. 349.—*(N. A.)*

terminada por los cuatro puntos A, B, C y D, que dan los tres pares AB, BC y CD de puntos homólogos.

Sean Z y X los puntos que respectivamente corresponden á uno Y, variable en la recta r, en las relaciones ss_1 y s_1s. Tracemos por B una recta r', y tomando en el plano rr' el punto O, fuera de las dos rectas, proyectemos desde él sobre r' la serie $CDYZ$; si $B'C'X'Y'$ es la proyección, $ABXY$ y $BCYZ$ son proyectivas, $BCYZ$ y $BB'X'Y'$ perspectivas, luego $ABXY$ y $BB'X'Y'$ son proyectivas, y lo mismo ocurre á los haces de rectas $Y'(ABXY)$ é $Y(BB'X'Y')$, los cuales no sólo son proyectivos, sino también perspectivos. Si, pues, las rectas XY' é YX' se cortan en el punto P, los A, B' y P están en línea recta, es decir, P está en la recta fija AB'.

Sean L y N los puntos homólogos de uno M de la recta r (diferente de los A, B y C) en las proyectividades ss_1 y s_1s. Si L' y M' son las proyecciones de M y N desde O sobre r', las figuras $ABLX$ y $BCMY$, así como las $BCMY$ y $CDNZ$, son proyectivas y las $CDNZ$ y $B'C'M'Y'$ son perspectivas, luego las $ABLX$ y $B'C'M'Y'$ son proyectivas. Considerando ahora el punto Q de intersección de las rectas XY' y LM', vemos que los haces $M'(ABLX)$ y $Q(B'C'M'Y')$ no sólo son proyectivos, sino también perspectivos, puesto que las rectas $M'L$ y QM' coinciden. Según esto, el punto de intersección de los rayos $M'A$ y QB' está en línea recta con C' y X ó, dicho de otro modo, los rayos $M'A$ y QB' se cortan en la recta $C'X$. Además, los haces $A(BB'C'M')$ y $B'(XPY'Q)$ son perspectivos, pues los rayos AB y $B'X$ se encuentran en X, los AC' y $B'Y'$ en C', los AM' y $B'Q$ en $C'X$ y los AB' y $B'P$ coinciden. Las series $BB'C'M'$ y $XPY'Q$, así como las $BB'C'M'$ y $BCDN$ y también las $BCDN$ y $ABCM$ son, por consiguiente, proyectivas, de donde, finalmente, se deduce la proyectividad de las $XPY'Q$ y $ABCM$.

Proyectemos Q desde O sobre r en R. Entonces, $XYZR$ y $XPY'Q$ son perspectivas, luego $XYZR$ y $ABCM$ son proyectivas. Puesto que, por una elección conveniente del punto M, se puede hacer que la figura $ABCM$ sea proyectiva con una dada, compuesta de cuatro elementos distintos, resulta que á cado punto Y de la recta r corresponde uno R, determinado por la condición de que la figura $XYZR$ sea proyectiva con una fija. Si M es uno de los puntos de coincidencia, los L y N

se confunden con él, el L' con el M', la recta $L'M'$ con la OM y el punto R ocupa siempre la posición M. En cualquier otro caso, al variar Y, las rectas $C'X$ y $B'Q$ describen haces perspectivos de vértices C' y B', respectivamente, cuyo eje perspectivo es AM'; luego, al mismo tiempo, los puntos X y Q describen series proyectivas de bases r y LM' y, por consiguiente, también la relación entre las figuras descritas por los puntos Y y R de la recta r es una proyectividad. Por último, si á los puntos Z y R corresponden los Z_1 y S en la relación ss_1, las figuras $XYZR$ é YZZ_1S son proyectivas, es decir, la YZZ_1S es proyectiva con la figura fija y los puntos Z y S se corresponden en la proyectividad que, entre las series descritas por los puntos Y y R, existe. Los pares de esta relación se transforman, por consiguiente, mediante la proyectividad ss_1 en pares de ésta; podemos, pues, decir que la relación YR es homóloga de sí misma en la proyectividad ss_1.

Si sobre una recta r *en la cual se ha definido una relación proyectiva por medio de dos series* s *y* s_1 *proyectivas, pero no en involución, se construyen los puntos* X *y* Z *homólogos de uno* Y *en las proyectividades* s_1s *y* ss_1, *respectivamente, y, además, el punto* R *tal que la serie* XYZR *sea proyectiva con una figura fija, la relación que se establece entre los puntos* Y *y* R *es una proyectividad homóloga de sí misma en la* ss_1. No obstante, si, para una posición de Y, el punto R se confunde con uno de coincidencia de la proyectividad ss_1, lo mismo ocurrirá para cualquiera otra.

Sea T el punto (diferente del R) homólogo del R en la proyectividad s_1s. Las series $YRXT$ y $ZSYR$ son proyectivas, luego también lo son las $YRXT$ y $RYSZ$; por consiguiente, los pares TZ, RY y SX pertenecen á una involución y las figuras $XZYR$ y $STRY$ son perspectivas. De aquí se sigue, que si se toma armónica la figura $XZYR$, también lo son $STRY$ y $TSRY$ y son proyectivas $XZYR$ y $TSRY$; luego, entonces, Y queda determinado por R de igual modo que R lo está por Y.

Si sobre una recta r *en la cual se ha definido una relación proyectiva por medio de dos series* s *y* s_1 *proyectivas, pero no en involución, se construyen los puntos* X *y* Z *homólogos de uno* Y *en las proyectividades* s_1s *y* ss_1, *respectivamente, y, además, el cuarto punto armónico,* R, *respecto de los* XZY, *los pares* YR

forman una involución que se transforma en sí misma en la proyectividad ss_1 (*). No obstante, si la relación ss_1 es una equivalencia, cualquiera que sea la posición de Y, el punto R coincide con el punto límite de la equivalencia.

Propiedades análogas se verifican en los haces de rectas y en los de planos.

(*) Este teorema ha sido demostrado por Chasles por medio del cálculo: *Traité de Géometrie supérieure,* 1852, núm. 276. Schröter dió una demostración geométrica en *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 1874, tomo LXXVII, pág. 120; *Die Theorie der Kegelschnitte,* tercera edición, 1898, pág. 63.—*(N. A.)*

§ 17.—Figuras homográficas.

116. Pasemos ahora á ocuparnos de las figuras de segunda categoría, comprendiendo bajo este nombre las figuras planas y las radiadas.

Si se proyecta, una ó más veces, una figura plana compuesta de un número cualquiera de puntos, se obtiene otra figura plana de igual número de puntos que la primera y tal que si varios puntos de la una están en línea recta, sus correspondientes en la otra también lo están. Debido á esta circunstancia, las dos figuras se llaman colineales (*), pero esta denominación se aplica de un modo más general á dos figuras de segunda categoría que son perspectivas ó entre las cuales se pueden intercalar un cierto número de figuras, también de segunda categoría, de manera que, después de la intercalación, cada dos figuras consecutivas sean perspectivas. Se pueden considerar las figuras de primera categoría como casos particulares de las de segunda y, en consecuencia, llamarlas también homográficas cuando son proyectivas.

Toda figura de segunda categoría es homográfica consigo misma. Cada dos partes homólogas de dos figuras de segunda categoría homográficas son homográficas. Dos figuras de segunda categoría, homográficas con una tercera, son homográficas entre sí.

117. *Para relacionar homográficamente dos figuras de se-*

(*) Nosotros, sin embargo, adoptaremos la denominación de homográficas, debida á Chasles, que es la generalmente usada en España. Los autores alemanes, siguiendo á Möbius, emplean la de colineales, y únicamente algunos aplican la de homográficas á las figuras de primera categoría proyectivas.—*(N. T.)*

gunda categoría se puede hacer corresponder á cuatro elementos de la una, que sean de igual naturaleza y no pertenezcan de tres en tres á una figura de primera categoría, cuatro elementos cualesquiera de la otra, que cumplan estas mismas condiciones (*), por ejemplo, si se toman en un plano cuatro puntos A, B, C y D, entre los cuales no hay tres en una recta, y en el mismo ó en diferente plano otros cuatro puntos A', B', C' y D', en los cuales tampoco hay tres en línea recta, las figuras $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son homográficas.

Se reconoce fácilmente la certeza del teorema general una vez vista la del caso particular enunciado. Para probar la de éste consideremos el punto M de intersección de AB con CD, el M' de intersección de $A'B'$ con $C'D'$, y un plano P, diferente del $A'B'C'$, trazado por $A'B'$. Entonces se podrá pasar, mediante un adecuado sistema de proyecciones, de la figura $ABCDM$ á una contenida en el plano P, de manera que sean homólogos los puntos A y A', B y B' y M y M', y si al hacerlo así resultan los puntos C_1 y D_1 como homólogos de los C y D, las figuras $A'B'C_1D_1$ y $A'B'C'D'$ son perspectivas, siendo su centro perspectivo el punto de intersección de C_1C' con D_1D'.

118. *Una homografía entre dos figuras de segunda categoría está completamente determinada cuando se conocen los homólogos de cuatro elementos de la misma naturaleza de una de ellas que de tres en tres no pertenezcan á una figura de primera categoría.*

Para demostrarlo, basta probar el caso particular siguiente: Si $ABCDE$ y $ABCDE'$ son dos figuras planas homográficas, compuesta cada una de cinco puntos, y tres cualesquiera de los A, B, C y D no están en línea recta, los E y E' coinciden; lo cual se consigue sin más que observar que, en virtud de la homografía entre los haces $A(BCDE)$ y $A(BCDE')$,

(*) Acaso no sea ocioso advertir que una vez fijada la naturaleza de las dos figuras y la de los cuatro elementos tomados en una de ellas, la de sus homólogos está completamente determinada por la condición de que se pueda pasar de aquéllos á éstos por el intermedio de sucesivas figuras, cada una de las cuales sea perspectiva con la anterior; es decir, que si las dos figuras consideradas son planas, la correspondencia ha de ser punto á punto y recta á recta; si la una es plana y la otra radiada, á los puntos y rectas de la primera han de corresponder las rectas y planos de la segunda y, por último, si las dos figuras son radiadas, han de corresponderse recta á recta y plano á plano.—*(N. T.)*

las rectas AE y AE' son idénticas, y lo mismo sucede á las BE y BE', CE y CE' y DE y DE'.

119. Para establecer ahora el concepto de homografía con mayor generalidad, procederemos del siguiente modo: Sean O, A y A' tres puntos dados en una recta, y P un plano que no pasa por ninguno de ellos. A cada punto B, exterior á la recta AA', le hacemos corresponder el punto B' de OB, cuya recta de unión con A' encuentra á la AB en un punto de P; si, por el contrario, B_1 es un punto de AA', diferente del O, tomaremos como auxiliares un punto B, exterior al plano P (*), y su correspondiente B', y haremos corresponder al punto B_1 el B'_1 de AA', cuya recta de unión con B' encuentra á la BB_1 en un punto de P; por último, al punto O le hacemos corresponder consigo mismo. Es preciso demostrar que la posición de B'_1 es independiente del punto auxiliar B escogido. Sean, en efecto, C un punto cualquiera, exterior á los planos P y OAB, y C' su homólogo, situado en OC, de tal modo, pues, que AC y $A'C'$ se encuentran en un punto de P. En virtud de la perspectividad de los triángulos ABC y $A'B'C'$, las rectas BC y $B'C'$, CA y $C'A'$ y AB y $A'B'$ se cortan en puntos de una recta, luego también BC y $B'C'$ concurren en un punto de P; y lo mismo sucede á B_1C y B'_1C', por la perspectividad de los triángulos B_1BC y $B'_1B'C'$; es decir, que en la construcción de B'_1 puede reemplazarse B por C. Además, si C_1 es otro punto del plano OAB, exterior al plano P y á la recta AA' y, por consiguiente, también al plano OAC, se puede utilizar el punto C_1 en vez del C y, por tanto, también del B (**).

(*) Y, también, naturalmente, á la recta AA'.—(*N. T.*)

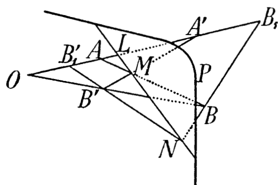


Fig. 51.

(**) Puede verse fácilmente, de una vez, que la posición de B'_1 sólo depende de los elementos dados O, A, A', B_1 y P. Basta para ello observar que, si L, M y N son los puntos en que el plano P encuentra á las rectas OA, AB y $A'B'$, y BB_1 y $B'B'_1$, respectivamente, el cuadrivértice $MNBB'$ determina sobre la recta AA' (**113**) la involución $OL.AB_1.A'B'_1$ en la que los dos pares OL y AB_1 sólo dependen de los elementos dados.—(*N. T.*)

Estas mismas consideraciones muestran que las rectas CC_1 y $C'C'_1$ se cortan en P, y que lo mismo sucede á las BC_1 y $B'C'_1$. Así, pues, si se designan por DD' y EE' dos pares de puntos homólogos, las rectas DE y $D'E'$ se encuentran en un punto de P; por consiguiente, se puede reemplazar el par AA' por cualquier otro par de puntos correspondientes, que sean distintos entre sí. El punto O y los del plano P son los únicos homólogos de sí mismos.

120. Si llamamos perspectivos dos grupos de puntos cuando están relacionados de manera que las rectas que unen cada par de puntos homólogos pertenecen á una radiación, la correspondencia que acabamos de definir constituye una perspectividad de naturaleza especial. La llamaremos perspectividad colineal (*), porque á puntos de una recta corresponden siempre puntos de otra recta. En efecto, si A, B y C son tres puntos de una recta r, sus homólogos A', B' y C' están sobre una recta r'. Pues, si la recta r está contenida en el plano P, los puntos A, B y C son homólogos de sí mismos; si es exterior al plano P, sin contener el punto O, las rectas $A'B'$ y $A'C'$ se confunden en una, puesto que pasan por el punto rP; y, finalmente, si pasa por el punto O, los A', B' y C' están en la misma recta r. Llamaremos á las rectas r y r', homólogas. Las rectas situadas en el plano P y las que pasan por el punto O son las únicas homólogas de sí mismas. Cada par de rectas homólogas se encuentran en un punto de P, y su plano pasa por O.

A toda figura plana corresponde una figura plana; á sus planos se les llama homólogos. El plano P y todos los que pasan por O son los únicos homólogos de sí mismos. Cada dos planos homólogos se cortan en una recta del P. Si DD' y EE' son pares de planos homólogos, el plano de las rectas DE y $D'E'$ pasa por O.

Con esto, la correspondencia establecida se extiende á figuras que constan de puntos, rectas y planos en posición cual-

(*) Nosotros, sin embargo, adoptaremos la denominación de homología, debida á Poncelet, que es la generalmente usada en España, y, en consecuencia, llamaremos centro y plano central de la homología á los elementos que, poco más adelante, designa el autor por centro perspectivo y sección perspectiva.—*(N. T.)*

quiera (*), y se ve que está definida cuando, además del punto O y del plano P, los cuales son bases (**) de figuras de coincidencia, se dan dos puntos ó dos planos homólogos (***). La definición es correlativa de sí misma.

Toda figura plana, cuyo plano no pasa por O, es perspectiva con su homóloga, siendo este punto O su centro perspectivo; y toda figura radiada, cuyo vértice no esté en P, es perspectiva con su homóloga, siendo este plano P el de su sección perspectiva. Llamaremos, por esto, centro perspectivo y sección perspectiva de nuestra correspondencia general, al punto O y al plano P, respectivamente.

Si se toma una figura en un plano que pase por O, la homóloga está en el mismo plano, y si A y A' son puntos homólogos diferentes, exteriores á este plano, la primera figura se proyecta desde A sobre P en la misma figura que la segunda se proyecta desde A'. De modo análogo se comportan las figuras radiadas homólogas cuyos vértices están en P. Según esto, cada dos figuras de segunda categoría homólogas son homográficas; de donde se sigue, que si $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son figuras de primera categoría homólogas, y los elementos A y B están separados por los C y D, también los A' y B' lo están por los C' y D'. Además, sabemos que á elementos incidentes corresponden otros en igual posición. Por consiguiente, *las figuras de tercera categoría homológicas tienen comunes todas las propiedades gráficas.*

Dos figuras planas de bases diferentes, perspectivas, pueden considerarse como partes homólogas de dos figuras de tercera categoría homológicas. Pues, además del centro de homología, se tienen dos planos homólogos por cuya recta de intersección se puede trazar arbitrariamente el plano central de la homología.

Análogamente, *dos figuras radiadas de vértices diferentes,*

(*) Estas figuras se llaman de tercera categoría, denominación que, para simplificar, adoptaremos á pesar de no ser usada por el autor. También se llaman figuras en el espacio.—*(N. T.)*

(**) A semejanza de lo hecho en las figuras de primera categoría, llamaremos base de una figura radiada á su vértice, y de una figura plana á su plano.—*(N. T.)*

(***) O, también, dos rectas homólogas que, como aquellos puntos ó planos, sean diferentes una de otra.—*(N. T.)*

perspectivas, pueden considerarse como partes homólogas de dos figuras homológicas.

121. Ampliando las anteriores observaciones, podemos generalizar ahora la definición de homografía, extendiéndola á las figuras de tercera categoría cuyos elementos homólogos sean de la misma naturaleza. Dos de estas figuras se llaman homográficas si son homológicas ó entre ellas puede intercalarse un cierto número de figuras de tal modo que, después de esta intercalación, cada dos figuras consecutivas sean homológicas.

Toda figura es homográfica consigo misma. Cadas dos partes homólogas de dos figuras homográficas son homográficas. Dos figuras homográficas con una tercera son homográficas entre sí. Los conceptos de homologia y homografía son correlativos de sí mismos.

122. *Dos figuras* ABCDE *y* A′B′C′D′E′, *cada una de las cuales consta de cinco puntos que de cuatro en cuatro no están en un plano, son homográficas.*

En efecto, si M es la proyección de E desde D sobre el plano ABC, y M' es la de E' desde D' sobre el plano $A'B'C'$, las figuras $ABCM$ y $A'B'C'M'$ son homográficas, y si en esta homografía corresponden los puntos D_1 y E_1 á los D y E, las figuras $A'B'C'D_1E_1$ y $A'B'C'D'E'$ son homológicas, siendo centro de la homología el punto de intersección de las rectas D_1D' y E_1E', y plano central el $A'B'C'$.

Una homografía está completamente determinada cuando se conocen los homólogos de cinco puntos que de cuatro en cuatro no están en un plano; es decir, que si las figuras de seis puntos $ABCDEF$ y $ABCDEF'$ son homográficas y entre los puntos A, B, C, D, E y F no hay cuatro que estén en un plano, los F y F' coinciden. Pues, como las radiaciones $A(BCDEF)$ y $A\,(BCDE'F')$ son homográficas, las rectas AF y AF' coinciden, y lo mismo sucede á las BF y BF', CF y CF', DF y DF' y EF y $E'F'$.

Los teoremas correlativos no necesitan ser enunciados particularmente.

123. Las figuras homográficas, sean ó no homológicas, se llaman también proyectivas, pero esta denominación no se aplica exclusivamente al caso de la homografía. *Las figuras homográficas cuyos elementos homólogos son de igual naturaleza,*

tienen comunes todas las propiedades gráficas. Así, por ejemplo, las propiedades gráficas de una serie no se modifican por ninguna proyección. La propiedad recíproca de que dos series que tienen comunes todas las propiedades gráficas son proyectivas, se ha demostrado ya (**106**). Esto mismo ocurre en las figuras más generales. Para verlo, formemos primero en dos figuras de segunda categoría, con elementos de igual naturaleza, las figuras $ABCDE$ y $ABCDE'$, que tengan comunes todas las propiedades gráficas y sean tales que tres cualesquiera de los elementos A, B, C y D no pertenezcan á una figura de primera categoría. Cada dos de estos elementos, A y B, determinan otro, AB, correlativo en aquella figura; los AB, AC, AD y AE, así como los AB, AC, AD y AE', están en una figura de primera categoría; luego, como estas figuras deben tener comunes todas las propiedades gráficas, AE y AE' coinciden, y del mismo modo coinciden BE y BE', CE y CE', DE y DE' y, por consiguiente, E y E'. Finalmente, formemos con puntos ó planos las figuras $ABCDEF$ y $ABCDEF'$, que también tengan comunes todas las propiedades gráficas y sean tales que cuatro elementos cualesquiera de los A, B, C, D y E no pertenezcan á una misma figura de segunda categoría; entonces, coinciden AF con AF', BF con BF', etc. y, por consiguiente, F con F'. Resulta, pues, que si la figura $ABCDEF$ está formada por seis puntos, de tal modo que entre los A, B, C, D y E no haya cuatro en un plano, y la figura $A'B'C'D'E'F'$ lo está de manera que tenga comunes todas las propiedades gráficas con la $ABCDE$, ambas son homográficas entre sí. Podemos, por consiguiente, enunciar el teorema:

Una relación en la que á cada punto corresponde otro, de manera que cada dos figuras homólogas tienen comunes todas las propiedades gráficas, es una homografía.

A esta clase de relaciones pertenece la congruencia. Por medio de dos figuras congruentes, cada una de las cuales se compone de tres puntos propios no situados en línea recta, se puede establecer una correspondencia que se extiende á todos los puntos, rectas y planos, en la cual cada dos figuras homólogas son congruentes y tienen comunes todas las propiedades gráficas. Las figuras congruentes pueden ser miradas siempre como partes homólogas de tales figuras. Luego:

Las figuras congruentes son homográficas.

124. Puesto que no varían las propiedades gráficas de una figura plana al proyectarla sobre otro plano, por consiguiente, más en general, por transformación en una figura plana homográfica, se puede, desde luego, llamar á tales propiedades proyectivas, esto es, propiedades que se transmiten por proyección. Y de la misma manera que, como antes se ha dicho, se llaman proyectivas las figuras homográficas, cualquiera que sea su naturaleza, se extiende la denominación de propiedades proyectivas á las propiedades gráficas de figuras cualesquiera. En consecuencia, se llama también á la Geometría de la posición Teoría de las propiedades proyectivas de las figuras ó Geometría proyectiva.

§ 18.— Figuras correlativas

125. Como ya se ha dicho, el nombre de proyectividad no se aplica solamente á las relaciones homográficas. Para conocer también las restantes relaciones comprendidas bajo tal denominación se puede partir de la noción siguiente:

Sean p, q y r tres rectas que de dos en dos no se encuentran. La recta de intersección de los planos que un punto cualquiera de la p determina con las q y r encuentra á las tres dadas; por cada punto de una de éstas se puede trazar una de tales rectas, y sólo una; dos cualesquiera de ellas no pueden encontrarse. Ahora, si las rectas a, b, c y d cortan á la p en A, B, C y D, á la q en A', B', C' y D' y á la r en A'', B'', C'' y D'', las series $ABCD$ y $A'B'C'D'$, por ejemplo, son perspectivas con el haz de planos $r(abcd)$ y, según esto, las $ABCD$, $A'B'C'D'$ y $A''B''C''D''$ son proyectivas.

Recíprocamente, si sobre las rectas p y q, que no se cortan, se toman las series proyectivas $ABCD$ y $A'B'C'D'$, toda recta r que encuentra á las AA', BB' y CC' encuentra también á la DD'. Pues dos cualesquiera de las rectas AA', BB' y CC' no pueden cortarse, luego lo mismo sucede á las p, q y r y, por consiguiente, se puede trazar por D una recta d que corte á las q y r, y si D'' es, por ejemplo, el punto de intersección con q, las series $A'B'C'D'$ y $A'B'C'D''$ son proyectivas con la $ABCD$, luego D'' se confunde con D' y DD' con d, y esta recta y la r están en un plano. Por consiguiente, si las

tres rectas p, q y r, que no se cortan de dos en dos, son encontradas por las cuatro rectas a, b, c y d, toda recta que sea cortada por las a, b y c lo es también por la d.

126. Utilizando como figuras auxiliares dos series proyectivas cuyas bases p y q no se cortan, haremos corresponder ahora á cada punto N un plano N' y á cada plano P un punto P'. Por el punto N pasa una recta a que corta á las p y q en puntos A y A_1, á los cuales corresponden en q y p, respectivamente, en virtud de la proyectividad dada, los B_1 y B; éstos determinan con el N un plano NBB_1 que designamos por N'. El plano P corta á p en C y á q en C_1; sean CD_1 y DC_1 pares de puntos correspondientes de la proyectividad dada; entonces, la recta DD_1 corta al plano P en un punto que designamos por P'. Si convenimos en llamar homólogos á los elementos N y N', así como á los P y P', también lo son N' y N y P' y P, y todo punto está en su plano homólogo.

Las series $ABCD$ y $B_1A_1D_1C_1$ son proyectivas, luego también lo son las $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$; por consiguiente, toda recta que corte á las AA_1, BB_1 y CC_1 corta también á la DD_1. La recta PN' corta siempre á las BB_1 y CC_1; si N está en P se cortan, además, PN' y AA_1 y, por tanto, también PN' y DD_1, es decir, el plano N' contiene el punto de intersección P' del plano P con la recta DD_1. El plano N' gira, pues, alrededor del punto P', mientras N se mueve sobre P. Según esto, si el punto N recorre una recta h, el plano N' gira alrededor de una recta determinada h', y mientras el plano P pasa por h, el punto P' se mueve sobre h'. Las rectas h y h', ó h' y h se llaman homólogas. Un haz de rectas cuyo vértice es homólogo de su plano se compone únicamente de rectas homólogas de sí mismas. Una recta no situada en ninguno de tales haces es siempre diferente de su homóloga y no tiene con ella punto alguno común. Toda recta que corta á dos rectas homólogas (diferentes) es homóloga de sí misma; toda recta homóloga de sí misma que corta á una recta corta también á su homóloga.

127. Los pares de elementos que pueden formarse por medio de esta correspondencia relativa á todos los puntos, rectas y planos se dice que forman un s i s t e m a f o c a l (*). Á

(*) Adoptamos esta denominación, debida á Chasles, que es la gene-

los puntos P, Q, R y S de una recta h corresponden los planos P', Q', R' y S' que pasan por la recta homóloga h', y las figuras $PQRS$ y $P'Q'R'S'$ son proyectivas. Pues si h y h' son distintas, las dos figuras son perspectivas, y si, por el contrario, h y h' coinciden, designando por n y n' dos rectas homólogas distintas, por P_1, Q_1, R_1 y S_1 los puntos en que la n corta á los planos P', Q', R' y S' y por P_2, Q_2, R_2 y S_2 los puntos en que estos mismos planos son cortados por la n', resulta que los puntos P, P_1 y P_2 están en línea recta, y lo mismo sucede á los Q, Q_1 y Q_2, R, R_1 y R_2 y S, S_1 y S_2, y las figuras $PQRS$ y $P_1Q_1R_1S_1$ son proyectivas y, además, las $P_1Q_1R_1S_1$ y $P'Q'R'S'$ perspectivas.

Si u y v son dos rectas de coincidencia que no se cortan y a, b, c y d otras rectas, también de coincidencia, que cortan á la u en A, B, C y D y á la v en A_1, B_1, C_1 y D_1, las series $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son proyectivas, pues los planos ua, ub, uc y ud son homólogos de los puntos A, B, C y D y pasan, respectivamente, por A_1, B_1, C_1 y D_1. De esta propiedad se deduce una consecuencia muy importante. Para engendrar el sistema focal se daban dos rectas de coincidencia (p y q) que no se cortasen y otras tres, también de coincidencia (por ejemplo, las AB_1, BA_1 y CD_1) que cortasen á aquéllas; ahora vemos que estos elementos determinativos pueden ser elegidos arbitrariamente, y que cada sistema de ellos produce un sistema focal único.

También dos haces de rectas homólogas $efgh$ y $e'f'g'h'$ son proyectivos, pues si se toma en el plano ef del primer haz una recta k, que no pase por su vértice ef, y se designa por k' la recta homóloga, la cual pasará por el vértice $e'f'$ del segundo haz, sin estar en su plano $e'f'$, la serie $k\,(efgh)$ es proyectiva con el haz de planos $k'\,(e'f'g'h')$. Según esto, cada dos figuras de primera categoría homólogas son proyectivas.

128. Lo dicho hasta aquí demuestra además que, en un sistema focal, á elementos incidentes corresponden elementos incidentes y á pares de elementos separados, pares también separados, de donde resulta, sin limitación alguna, que dada una figura cualquiera F, formada por puntos, rectas y planos,

ralmente usada en España, en lugar de la de sistema nulo que, siguiendo á Möbius y Staudt, usa el autor.—*(N. T.)*

en número y posición cualesquiera, existe otra F' formada por los elementos correlativos, la cual tiene exclusivamente todas las propiedades gráficas correlativas de las que posee la F. Por consiguiente, si designamos por α y β propiedades gráficas de una figura y por α' y β' las propiedades correlativas de las α y β, que, naturalmente, suponen elementos correlativos, y admitimos que la propiedad α lleva siempre consigo la β, también la α' tendrá siempre por consecuencia la β'; pues si por medio de un sistema focal se pasa de una figura F, que posee la propiedad α', á otra figura F', ésta tendrá la propiedad α y, por consiguiente, la β, luego también la β' es propiedad de la figura F.

Con esto queda ahora demostrada, sin ninguna restricción, la ley de dualidad entre puntos y planos, y, en consecuencia, también las otras dos leyes de dualidad de la Geometría proyectiva. En realidad, se había establecido ya la validez de las tres especies de correlación para todas las consecuencias de los teoremas ó principios fundamentales hasta aquí sentados; pero ahora se ve que estas leyes pueden aplicarse de un modo general en Geometría proyectiva, ya se introduzcan ó no nuevos principios fundamentales.

129. Si se une un sistema focal con una homografía (entre figuras de tercera categoría) de tal modo que, dado un elemento, se halle primero su homólogo en el sistema focal y después el que corresponde á éste en la homografía, se obtiene una relación llamada correlativa ó dual (*). En ella, á cada punto corresponde un plano, á cada recta una recta y á cada plano un punto. Dos figuras homólogas en una relación de esta naturaleza se llaman correlativas ó duales, y si una de las figuras posee una propiedad gráfica, en la otra existe la propiedad correlativa.

Dos figuras correlativas con una tercera tienen comunes todas las propiedades gráficas.

Si A, B, C, D y E son cinco puntos que de cuatro en cuatro no están en un plano y A', B', C', D' y E' son cinco planos

(*) El autor usa la denominación de recíproca, dada por Möbius, muy generalizada entre los alemanes. En España se aplica, casi exclusivamente, la de correlativa, debida á Chasles.—*(N. T.)*

que de cuatro en cuatro no pasan por un punto, las figuras $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son siempre correlativas y sólo hay una correlación en que ambas sean homólogas. Pues si A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1 son los planos homólogos de los puntos A, B, C, D y E en un sistema focal cualquiera, las figuras $A_1B_1C_1D_1E_1$ y $A'B'C'D'E'$ son homográficas, luego las $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ son correlativas. Además, si F es un punto arbitrario, no se pueden hallar dos planos diferentes F' y F'', tales que las figuras $A'B'C'D'E'F'$ y $A'B'C'D'E'F''$ sean correlativas de la $ABCDEF$, puesto que las $A'B'C'D'E'F'$ y $A'B'C'D'E'F''$ deberían tener comunes todas las propiedades gráficas.

130. El sistema focal es un caso particular de la correlación. *Si una relación correlativa es tal que cada punto está situado en su plano homólogo, constituye un sistema focal.* En efecto, sean A un punto cualquiera y A' su plano homólogo, que pasa por él, y tracemos por el punto A la recta r que lo une con otro punto arbitrario B del plano A'; también la recta r' homóloga de la r está en A'; el plano homólogo del punto B pasa por B y r', pero es diferente del A', luego B está en r'; es decir, r coincide con r'; toda recta del plano A' que pasa por el punto A es de coincidencia y A es el punto homólogo del plano A'. Cada dos elementos homólogos son, pues, permutables entre sí. Ahora, si u y v son rectas de coincidencia, sin ningún punto común, y $a, b, c, \ldots\ldots$ rectas, también homólogas de sí mismas, que cortan á las u y v, los puntos de intersección forman series proyectivas, pues el haz de planos $u(abc\ldots\ldots)$ es proyectivo con la serie $u(abc\ldots\ldots)$ y perspectivo con la $v(abc\ldots\ldots)$, y así se llega á las construcciones antes dadas para el sistema focal.

Cuando en una correlación pueden permutarse entre sí los elementos homólogos, á cada plano se le llama polar de su punto homólogo; á cada punto, polo de su plano homólogo; á cada recta, polar de su homóloga; á cada dos figuras homólogas, polares recíprocas, y á la relación, polaridad recíproca (*). Los pares de elementos homólogos en

(*) Generalmente se prescinde hoy del calificativo de «recíproco», por cuya razón diremos simplemente figuras polares una de otra, y polaridad.—*(N. T.)*

esta relación, se dice que forman un sistema polar. El sistema focal está comprendido dentro de los sistemas polares: un sistema polar en el que todos los puntos no están sobre sus planos polares, se llama un sistema polar ordinario.

131. Un punto P y un plano P' tomados arbitrariamente pueden considerarse como elementos homólogos en una correlación. En tal caso, á cada plano y á cada recta que pasan por el punto P corresponden, respectivamente, un punto y una recta situados en el plano P', y recíprocamente; se obtiene, pues, una relación correlativa entre las dos figuras de segunda categoría. Para relacionar correlativamente los planos y rectas que pasan por el punto P con los puntos y rectas del plano P', se pueden elegir arbitrariamente en este plano cuatro puntos que de tres en tres no pertenezcan ó una recta, ó cuatro rectas que de tres en tres no pasen por un punto, como elementos homólogos, respectivamente, de cuatro planos que de tres en tres no pasan por una recta, ó de cuatro rectas que de tres en tres no estén en un plano, tomados en la radiación de vértice P; y los cuatro pares de elementos correspondientes así formados, determinan por completo la relación.

Además de ésta, en las figuras de segunda categoría existen otras dos clases de correspondencia que se llaman correlativas ó duales. Si se pasa de una figura plana á una radiada correlativa y de ésta á una plana homográfica, las dos figuras planas se llaman correlativas ó duales, y, en ellas, á cada punto de la una corresponde una recta de la otra. Para establecer una relación de esta naturaleza entre dos planos, se pueden elegir arbitrariamente en uno cuatro rectas, que de tres en tres no pasen por un punto, como homólogas de cuatro puntos dados en el otro, que de tres en tres no estén en una recta; y los cuatro pares así formados determinan por completo la correspondencia. Si se pasa de una figura radiada á una plana correlativa y de ésta á una radiada homográfica, las dos figuras radiadas se llaman correlativas ó duales, y, en ellas, á cada recta de la una corresponde un plano de la otra. Si se hacen corresponder cuatro planos que pasan por un punto y que de tres en tres no contienen una recta, á cuatro rectas que también pasan por un punto y no están de tres en tres en un plano, con ello se

determina sin ambigüedad una relación correlativa entre dos figuras radiadas.

Las figuras correlativas de primera categoría son proyectivas; recíprocamente, dos figuras de primera categoría proyectivas pueden llamarse también correlativas, salvo el caso de dos series ó dos haces de planos. La propiedad de ser proyectivas las figuras de primera categoría homólogas, es común á las figuras correlativas y á las homográficas. Por esta razón, también á las figuras correlativas se les llama proyectivas. Mas, con la homografía y la correlación, se han agotado ya todas las clases de correspondencia en que cada figura de primera categoría tiene como homóloga otra proyectiva con ella.

Respecto de las figuras de segunda categoría correlativas debemos aún hacer observar lo siguiente. Las figuras planas pueden tomarse con la misma base; si, entonces, son permutables los elementos homólogos, á cada recta se la llama polar de su punto correspondiente, y á cada punto polo de su recta homóloga. Las figuras radiadas pueden tener el mismo vértice; si, entonces, son permutables los elementos homólogos, á cada elemento se le llama polar del correspondiente. En general, siempre que dos figuras de segunda categoría correlativa son superpuestas (en el mismo plano ó con el mismo vértice) y son permutables los elementos homólogos, cada dos figuras correspondientes se llaman polares una de otra, la relación que las liga polaridad y los pares que de tal correspondencia resultan se dice que forman un sistema polar (plano ó radiado).

132. Para terminar, indicaremos algunos teoremas aplicables á toda clase de correlaciones y homografías.

Si de dos figuras correlativas una posee una propiedad proyectiva, la otra tiene la propiedad correlativa.

Dos figuras correlativas con una tercera son homográficas entre sí.

Una figura correlativa con una de dos figuras homográficas lo es también con la otra.

Dos figuras proyectivas con una tercera son proyectivas entre sí.

§ 19.—Figuras congruentes en los planos propios

133. Vimos en el § **17** que la congruencia es una homografía especial, y vamos á deducir ahora una propiedad característica de la congruencia que la distingue de las otras homografías, en lo cual se nos presentará ocasión de hacer uso de las figuras correlativas antes estudiadas. Antes, sin embargo, es necesario considerar la congruencia en los planos propios.

Ya en el § **14** (**90** y **92**) se reconoció que las figuras congruentes tienen comunes todas las propiedades que únicamente se refieren á la incidencia de los elementos y al orden de sucesión de los puntos propios en las rectas y, por consiguiente, en particular, todas las propiedades gráficas. Y aún más general: *las figuras congruentes tienen comunes todas las propiedades que pueden definirse con los conceptos hasta aquí introducidos*. Pues estos conceptos, aparte los de incidencia de elementos y ordenación de puntos propios en rectas, sólo comprenden el de congruencia; y siempre que en una de dos figuras congruentes hay dos partes congruentes, también las partes homólogas de la otra figura son congruentes (**92**, 3.°).

134. Las series congruentes (pero distintas) situadas sobre la misma recta propia r no tienen nunca más de un punto propio de coincidencia (**92**, 7.°). *Si existe un punto propio de coincidencia* B, *la relación es involutiva y queda determinada por este punto,* pues si se toma sobre r un punto cualquiera A

y se designa por C su homólogo, los pares BA y BC son congruentes y los puntos A y C están á diferentes lados del B; luego sólo hay una posición posible para C, y el homólogo de C es A. Recíprocamente: *Si la relación es involutiva, existe un punto de coincidencia propio* B; pues designando por A y C dos puntos homólogos propios, por B el punto medio del segmento AC y por B' el homólogo del B, con lo cual las figuras ACB y CAB' son congruentes, el punto B' será medio del segmento CA y, por consiguiente, el mismo B. Cada dos series de una recta propia así relacionadas se llaman congruentes inversas, y además del punto propio B tienen otro impropio B_1 de coincidencia (**94**), el cual está completamente determinado en la recta r por el punto B; llamaremos al punto B_1 asociado del B en la recta r (*). El punto medio de un segmento AC está siempre armónicamente separado de su punto asociado en la recta AC por los extremos A y C del segmento.

Si dos series congruentes tienen como base común una recta propia r sin tener ningún punto de coincidencia, no son involutivas y se llaman congruentes directas. En tal caso, si al punto propio A corresponde el B y á éste corresponde el C y se designa por B_1 el punto de la recta r asociado al B, los tres puntos A, B y C son diferentes uno de otro, AB y BC son figuras congruentes, B es el punto medio del segmento AC, la serie $ACBB_1$ es armónica y, por consiguiente, se puede aplicar al par BB_1 el teorema demostrado en el núm. **115**. El punto B_1 es, según esto, el mismo para todas las posiciones de B ó varía constantemente con éste. En el primer caso diremos que B_1 es el punto absoluto (**) de la recta r; en el segundo, los pares BB_1 forman una involución que llamaremos involución absoluta sobre la recta r. Dos series idénticas de base r son siempre congruentes entre sí y deben considerarse como congruentes directas.

135. Al pasar de una figura á otra congruente con ella,

(*) Utilizando una denominación de Reye, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1877, tomo LXXXII, pág. 174.—*(N. A.)*

(**) Aquí y en lo que sigue se aplica el adjetivo «absoluto» en la acepción introducida por Cayley, *Phil. Trans.*, 1859, tomo 149.

cada dos puntos asociados de la recta *r* coinciden con puntos asociados de la recta homóloga. Por consiguiente, si la recta *r* tiene un punto absoluto, lo mismo ocurre en todas las demás rectas propias. Entonces, en cada recta propia todos los puntos propios están asociados al punto absoluto de la recta; la relación entre dos series congruentes directas, de bases propias, es, según la expresión introducida en el núm. **114**, una equivalencia cuyo punto límite es el punto absoluto; cada dos pares de puntos directamente congruentes de la recta propia, son equivalentes respecto de su punto absoluto. Pero si en la recta *r* existe una involución absoluta, en cualquiera otra recta propia hay una involución absoluta.

Vemos, pues, que en toda recta propia hay un punto absoluto, ó en toda recta propia hay una involución absoluta. Si se admite lo primero, se obtiene la Geometría euclidiana; la última hipótesis conduce, por el contrario, á la Geometría no euclidiana. Cuál de ambas hipótesis corresponde á la realidad es cosa que no podemos decidir aquí; los hechos que han servido de fundamento á la exposición hasta aquí efectuada no resuelven la cuestión.

136. Las figuras congruentes (pero distintas) situadas en un plano propio *P* no tienen nunca tres puntos de coincidencia propios que no estén en línea recta (**92**, 6.°). *Si dos puntos propios* A *y* B *son de coincidencia, todos los puntos de la recta* r *que une* A *con* B, *son también de coincidencia; la relación queda determinada por la recta* r *y cada dos puntos homólogos pueden permutarse entre sí.* Pues si se toma en el plano *P* el punto propio *C* arbitrario, pero exterior á la recta *r*, y llamamos *D* á su homólogo, las figuras *ABC* y *ABD* del plano *P* deben ser congruentes, y, por tanto, según el axioma IX del § **13** (**88**), el punto *D* está determinado y se halla á diferente lado de la recta *r* que el punto *C*; el punto propio C_1, en que se encuentran *CD* y *r*, es de coincidencia, lo mismo que la recta *CD*, y las series congruentes que resultan sobre *CD* tienen el punto C_1 de coincidencia; luego son involutivas, y los puntos *D* y *C* también son, por consiguiente, homólogos.

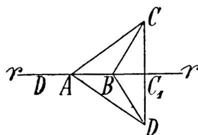


Fig. 52.

Las dos figuras tienen, además, otro punto de coincidencia no contenido en la recta r, el punto impropio R asociado al C_1 en la recta CD; pero ningún otro punto exterior á la recta r es homólogo de sí mismo (§ **17**). El punto R se llama polo absoluto de la recta r en el plano P y es asociado de cada punto propio D_1 de la recta r, pues, en la congruencia que acabamos de considerar, la recta $D_1 R$ es homóloga de sí misma y las series congruentes que contiene tienen los puntos D_1 y R de coincidencia.

137. Una congruencia de esta especie se origina cuando, á partir del punto propio O, común á dos rectas b y c, se llevan sobre éstas segmentos congruentes OP y OQ. Según el axioma V del § **13**, las figuras POQ y QOP son congruentes, siendo elementos de coincidencia en esta relación la recta PQ, el punto medio de PQ y, en general, todos los puntos de la recta r que une este punto medio con el O. También las rectas b y c, así como las c y b, son homólogas; luego *las figuras* bc *y* cb *son congruentes.*

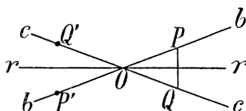


Fig. 53.

Si consideramos el caso particular en que la recta c contiene un polo absoluto B de la b, se podrá hallar un punto C tal, que las figuras bcB y cbC sean congruentes, en cuyo caso el punto C está en B y es el polo absoluto de c en el plano bc; la relación entre las rectas b y c es, pues, recíproca, y se dice que estas rectas son perpendiculares entre sí. En todo haz de rectas de vértice propio cada rayo es perpendicular á uno, y sólo á uno, del haz, y ambos rayos son diferentes uno de otro. Desde cada punto propio se puede trazar una perpendicular, y sólo una, á toda recta que no pase por él.

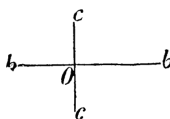


Fig. 54.

Además de estas propiedades pueden sentarse aquí los siguientes teoremas:

1.° *Si sobre dos rectas* b *y* c *que pasan por un punto propio* O, *se llevan á partir de éste segmentos congruentes* OP *y* OQ,

y sobre las otras semirectas de b *y* c *los segmentos, también congruentes,* OP′ *y* OQ′, *las figuras* P′OQ *y* Q′OP *son congruentes.*

DEMOSTRACIÓN: Por ser congruentes las figuras OPQ y OQP *(fig. 53)*, existe un punto Q_1, tal que las figuras $P'OPQ$ y Q_1OQP sean congruentes, el cual se halla en la recta OQ, esto es, c, pero no en la semirecta OQ. Los segmentos OQ_1 y OP' son congruentes, luego también lo son los OQ_1 y OQ', y Q_1 es el mismo Q' y las figuras $P'OPQ$ y $Q'OQP$ son congruentes.

2.° *Si* A, B, C *y* D *son puntos de un plano, tales que los segmentos* AB *y* AC, *así como los* DB *y* DC, *sean congruentes, las figuras* ABCD *y* ACBD *son congruentes.*

DEMOSTRACIÓN: Si A, B y C estuviesen en una recta y, al mismo tiempo, lo estuvieran también B, C y D, el punto A tendria que confundirse con el D. Supongamos, pues, que A, B y C, por ejemplo, no estén en línea recta; entonces, las figuras ABC y ACB son congruentes y podemos tomar en el plano ABC el punto D_1, tal que las figuras $ABCD$ y $ACBD_1$ sean congruentes. Si A y D están al mismo lado de BC, lo mismo ocurrirá con A y D_1, y recíprocamente; luego D y D_1 no están á diferentes lados de BC. Ahora bien; puesto que BCD y CBD, así como BCD y CBD_1 son congruentes, también lo son CBD y CBD_1, luego D y D_1 coinciden.

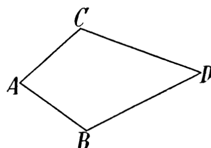


Fig. 55.

3.° *Si* A, B *y* C *son puntos propios cualesquiera y* A′, B′ *y* C′ *son puntos, también propios, tales que los segmentos* AB *y* BC *sean congruentes con los* A′B′, A′C′ *y* B′C′, *respectivamente, las figuras* ABC *y* A′B′C′ *son congruentes.*

DEMOSTRACIÓN: Trazando un plano por A, B y C, en él se puede tomar un punto D, tal que ABD y $A'B'C'$ sean congruentes; y, entonces, AC y AD, así como BC y BD, son congruentes, luego, según el teorema anterior, también lo son ABC y ABD.

4.° *Si, en un plano propio* S, *hay dos figuras congruentes, tales que dos puntos propios* P *y* P′ *se correspondan doblemente y dos puntos propios homólogos* Q *y* Q′ *estén á diferentes lados*

de la recta PP′, *el punto* O, *medio del segmento* PP′, *y todas las rectas del plano* S *que lo contienen son de coincidencia y cada dos puntos propios homólogos están á diferentes lados del* O.

DEMOSTRACIÓN: Desde luego, la recta PP' es de coincidencia, sobre ella hay dos series congruentes inversas con el punto de coincidencia O, y los segmentos OP y OP' son congruentes. Llevemos sobre cualquier otro rayo del haz O en el plano S, á partir del vértice O, los segmentos OR y OR' congruentes con los OP y OP', y supongamos que R y Q, por ejemplo, y, por tanto, R' y Q' están al mismo lado de PP'.

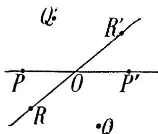


Fig. 56.

Según el teorema 1.°, $P'OR$ y $R'OP$ son congruentes, luego, llamando R_1 al punto homólogo del R_1, también lo son $P'OR$ y POR', y POR_1 y POR'; además Q' y R_1 y, por consiguiente, también R' y R_1 están al mismo lado de PP', luego R_1 se confunde con R', y R y R' son homólogos.

5.° *Si, en un plano propio* S, *hay dos figuras congruentes, tales que dos puntos propios* P *y* P′ *se correspondan doblemente y dos puntos propios homólogos* Q *y* Q′ *estén al mismo lado de la recta* PP′, *todos los puntos de la recta* r *que, en el plano* S, *es perpendicular á* PP′ *en el punto* O, *medio del segmento* PP′, *son de coincidencia.*

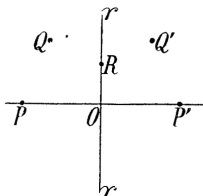


Fig. 57.

DEMOSTRACIÓN: Por ser la recta PP' y el punto O de coincidencia, también la recta r coincide con su homóloga; y si sobre ella tomamos el punto propio R del mismo lado de PP' que Q y Q', y llamamos R' al punto homólogo, como R' y Q' y, por tanto, R y R' deben estar al mismo lado de PP', R' y R coinciden.

6.° *Si por un punto propio* O *se trazan dos rectas no perpendiculares,* b *y* c, *en el haz* bc *hay un rayo* c′, *y sólo uno, diferente del* c, *tal que las figuras* bc *y* bc′ *sean congruentes.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos sobre C el punto propio Q arbitrario (diferente del O). Si, en una congruencia en el plano bc,

deben ser b y O elementos de coincidencia, pero sin que lo sea c, deberán serlo todos los puntos de b ó la congruencia será inversa con el punto de coincidencia O. En el primer caso, si Q_1 es el homólogo del punto Q, la recta QQ_1 pasa por el polo absoluto de la b en el plano bc, es decir, es perpendicular á b y, por tanto, diferente de c, Q_1 no está situado en c, y la recta c' de unión de O con Q_1, diferente, según esto, de c, es homóloga de ésta. En el segundo caso, sean Q y Q_2 puntos homólogos; del teorema 4.° se deduce que deben estar al mismo lado de b; luego Q_1 y Q_2 están á diferentes lados. Si, ahora, llevamos sobre b los segmentos OP y OP' congruentes, OPQ y $OP'Q_2$ son congruentes; también lo son OPQ y OPQ_1, luego lo serán OPQ_1 y $OP'Q_2$, y $OPP'Q_1$ y $OP'PQ_2$. Según el teorema 4.° las rectas OQ_1 y OQ_2 coinciden, por consiguiente, y nuevamente se obtiene c' como rayo homólogo del c.

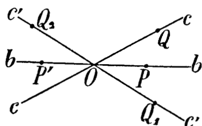


Fig. 58.

7.° *Si, en una congruencia existente en un haz de rectas de vértice propio* O, *el rayo* b *es de coincidencia, también lo es el* b_1 *del mismo haz, perpendicular al* b, *y cada dos rayos homólogos están armónicamente separados por los* b *y* b_1, *ó todos los rayos son de coincidencia.*

DEMOSTRACIÓN: El rayo homólogo del b_1 es perpendicular al b, luego coincide con b_1. Tomemos ahora en el haz bb_1 un tercer rayo c, y llamemos c' al rayo homólogo. Si los rayos c y c' coinciden, lo mismo sucede con todos; en el caso contrario, hay un rayo d, diferente del c', que hace que bc' y bd y, por tanto, bc y bd sean congruentes; luego, según el teorema anterior, el rayo d no puede ser diferente del c, y la relación es involutiva con los dos rayos de coincidencia b y b_1.

Dos haces de rectas congruentes (pero distintos), situados en el mismo plano, que tienen como vértice común á ambos un punto propio, se llaman congruentes inversos si tienen rayos de coincidencia, y congruentes directos en el caso contrario. Dos haces de rectas idénticos deben considerarse siempre como congruentes directos.

Los haces congruentes inversos están en involución y tienen dos rayos de coincidencia, perpendiculares entre sí; la

relación queda determinada por uno de los rayos de coincidencia; según el teorema 4.°, todo punto contenido en uno de los rayos de coincidencia se confunde con su homólogo, en tanto que sobre el otro hay dos series congruentes inversas; en virtud de lo dicho en el número **113**, ningún par de rayos homólogos está separado por otro.

8.° *Si por un punto propio* O *se traza un plano* P, *todos los puntos asociados al* O *en el plano* P *están en una recta.*

DEMOSTRACIÓN: Tracemos en el plano P, por el punto O, dos rectas perpendiculares a y a_1, una tercera recta arbitraria b y el cuarto rayo armónico c respecto de los a, a_1 y b, con lo cual ab y ac serán congruentes. Si A, A_1, B y C son los puntos asociados al O en a, a_1, b y c, respectivamente, A y A_1 serán los polos absolutos de a_1 y a en el plano P. Establezcamos ahora en este plano una congruencia en la que todos los puntos de la recta a sean de coincidencia, y los rayos b y c sean homólogos; los puntos B y C serán también homólogos, y á los puntos propios M y N de la recta b corresponderán los M' y N' de la c. Las series $OMNB$ y $OM'NC$ son perspectivas, y las rectas MM' y NN' son perpendiculares á la a y se cortan en A_1, luego la BC pasa por A_1. Pero, análogamente, se ve que también debe pasar BC por A, es decir, que B está en la recta AA_1 y, por consiguiente, lo mismo sucede á todos los puntos asociados al O en el plano P.

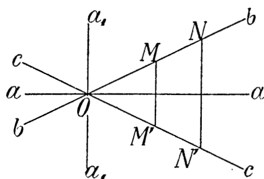


Fig. 59.

Esta recta se llama la polar absoluta del punto O en el plano P; no contiene al punto O, y es, en general, una recta impropia; cada uno de sus puntos es asociado al O. La polar absoluta del punto O en el plano P es, al mismo tiempo, lugar de los polos absolutos que, en el plano P, corresponden á las rectas del mismo que pasan por el punto O.

9.° *Si dos haces del mismo vértice propio* O *y situados en el mismo plano son congruentes, de tal modo que dos rayos no perpendiculares* c *y* c′ *se correspondan doblemente, los dos haces son congruentes inversos y la relación está determinada por el par* cc′.

DEMOSTRACIÓN: Llevemos sobre c los segmentos OC y OC_1 congruentes, y llamemos C' al punto de c' homólogo del C; los segmentos OC y OC' serán congruentes. El punto homólogo de C' debe estar sobre c, y es, por tanto, C; pues si fuera C_1, serían congruentes SCC' y $SC'C_1$, luego también SCC' y SC_1C', y c y c' serían perpendiculares. La recta CC' es, pues, de coincidencia, así como el punto medio del segmento CC' y la recta b que lo une con O, etc.

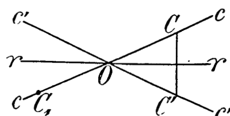


Fig. 60.

10.° *En todo haz de rectas con vértice propio, los pares* bb_1 *de rayos perpendiculares forman una involución.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos en el haz un rayo cualquiera a, diferente de los b y b_1; según el teorema 6.°, los rayos a y b son homólogos de una congruencia en el haz, no involutiva (por tanto, directa), completamente determinada; al rayo b corresponde uno c, distinto de los a y b, que hace que ba y bc sean congruentes. El rayo b_1 es el cuarto armónico de los a, c y b, varía con el b, y los pares bb_1 forman una involución (**115**).

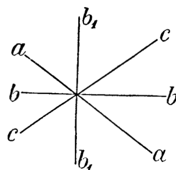


Fig. 61.

A esta involución la llamaremos involución absoluta en el haz de rectas; carece de rayos de coincidencia.

11.° *En todo haz de rectas con vértice propio* O, *la correspondencia de dos cualesquiera de sus rayos determina una congruencia directa.*

DEMOSTRACIÓN: Si los dos rayos no son perpendiculares, basta aplicar el teorema 6.°, como se ha hecho ya en la demostración precedente. Si, por el contrario, se hacen corresponder dos rayos perpendiculares a y a_1, la relación debe ser involutiva. En este caso, sean A y B puntos propios homólogos, respectivamente situados en a y a_1, y tomemos sobre a el segmento OC convergente con el OA. Al punto B le debe corresponder el mismo A ó el C; pero si fuese el A, según el teorema 5.°, habría un rayo de coincidencia, luego el homólogo de B es C. Tracemos ahora un rayo b entre los puntos

A y B, y llamemos b_1 su homólogo (en dos sentidos). Como b_1 pasa entre B y C, los rayos a y a_1 están separados por los b y b_1, la congruencia es, pues, directa, y los rayos b y b_1 son perpendiculares entre sí. Los dos pares $a a_1$ y $b b_1$ determinan una involución, la cual coincide, por consiguiente, con la involución absoluta del haz.

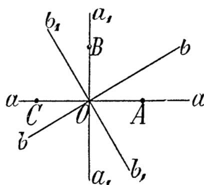


Fig. 62.

Según esto, la congruencia directa en el haz de rectas, en general no es involutiva; únicamente la involución absoluta del haz puede comprenderse entre las congruencias directas. Cada par de rayos perpendiculares del haz está separado por todo otro par de rayos perpendiculares.

12.° *Si* A, B *y* C *son tres puntos propios, tales que las rectas* AB *y* AC *son perpendiculares, y se traza desde* A *una perpendicular á* BC *que encuentra á esta recta en* A′, *este punto se halla entre los* B *y* C.

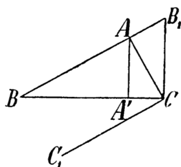


Fig. 63.

Demostración: Si, por ejemplo, estuviese C entre A' y B, el punto B_1 de intersección de AB con la perpendicular trazada á BC en el plano ABC por el punto C caería entre A y B, y levantando en el mismo plano la recta CC_1 perpendicular á la AC, los rayos perpendiculares CA y CC_1 no estarían separados por los también perpendiculares CB y CB_1.

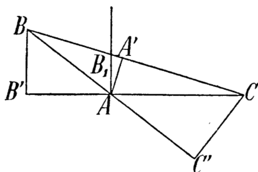


Fig. 64.

13.° *Si* A, B *y* C *son puntos propios cualesquiera, no situados en línea recta, y las rectas* BC, CA *y* AB *son cortadas por las perpendiculares respectivas trazadas por* A, B *y* C *en* A′, B′ *y* C′, *el punto* A′ *estará entre los* B *y* C, *ó estará el* B′ *entre los* C *y* A, *ó estará el* C′ *entre los* A *y* B.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, por ejemplo, que B' no esté entre C y A, sino que esté A entre B' y C. La perpendicular á AC en A, trazada en el plano ABC, encuentra á BC en un punto B_1 comprendido entre los B y C (ó en el mismo B), luego, según el teorema anterior, A' está entre B_1 y C, esto es, entre B y C.

14.° *Si se hacen corresponder el punto* O *consigo mismo y la semirecta* OF *con la* OF′, *con ello queda determinada en el plano* OFF′ *una congruencia, y sólo una, en la que el haz homólogo del* O *es congruente directo con él.*

DEMOSTRACIÓN: Al punto propio A de la semirecta OF corresponde uno determinado A' en la OF'. Si se toma el punto propio B en el plano OFF', fuera de la recta OF y del rayo perpendicular á ésta trazado en el haz, en el plano OFF' hay dos puntos B' y B_1 tales que $OA'B'$ y $OA'B_1$ son congruentes con OAB. Los rayos OB' y OB_1 no coinciden; uno de ellos, por ejemplo, el OB', es el homólogo del OB (teorema 11.°), y B' es entonces el punto homólogo del B.

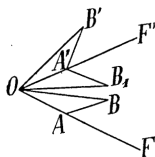


Fig. 65.

Cuando por medio de una congruencia de esta especie se pasa de una figura á otra, se dice que la primera ha girado en el plano OFF' alrededor del punto O. A esta congruencia pertenece, en particular, aquélla en que cada dos puntos homólogos están en línea recta con el punto O (véase el teorema 4.°).

15.° *Si se hacen corresponder la recta propia* r *del plano* P *consigo misma y en la recta* r *el punto* A′ *al punto* A, *con ello queda determinada una congruencia, y sólo una, en la cual sobre la recta* r *hay dos series congruentes directas, y dos puntos propios homólogos,* B *y* B′, *se hallan al mismo lado de* r.

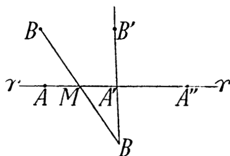


Fig. 66.

DEMOSTRACIÓN: Al punto A' no debe corresponder el A, sino uno como el A''. Sea M el punto medio del segmento AA'; si primero hacemos girar la figura alrededor de M hasta que A

venga á A', B vendrá á B_1, punto en la recta MB á diferente lado de r que B. Haciendo girar ahora alrededor de A', de manera que A venga á A'', B_1 deberá venir á B', y se ve, por consiguiente, al mismo tiempo, que el segmento B_1B' tiene su punto medio en A'.

Cuando por medio de una congruencia de esta especie se pasa de una figura á otra, se dice que la primera se ha trasladado en el plano P á lo largo de la recta r. La traslación puede reducirse á dos rotaciones.

§ 20.—Los sistemas polares absolutos (*)

138. Volvamos de nuevo sobre el concepto de polar absoluta (**137**, 8.°).

Sean R, S y T puntos propios de un plano Q, y r, s y t sus polares absolutas en el mismo; la recta RS es cortada por la r en el punto R' asociado al R, y por la s en el punto S' asociado al S, y las r y s contienen el polo absoluto de la RS en el plano Q. Si se hace ahora la hipótesis que conduce á la Geometría euclidiana, los puntos R' y S' coinciden en uno, que es el punto absoluto de la recta RS; luego las rectas r y s tienen comunes dos puntos y se reducen á una sola e, que podemos llamar la recta absoluta del plano Q. En el plano Q todo punto propio tiene como polar absoluto la recta e, y esta recta contiene el polo absoluto de toda recta propia y es cortada por cada recta propia en el punto absoluto de ésta.

Los pares de rectas aa', bb', cc' ....., que constituyen la involución absoluta correspondiente al punto R en el plano Q, son cortados por la recta e en pares de puntos AA',

(*) Cayley ha hecho observar que las propiedades métricas de las figuras en la Geometría euclidiana aparecen como casos particulares de las propiedades proyectivas cuando se consideran ciertas figuras que aquí son substituídas por un «sistema polar absoluto»; véase la Memoria citada en la página 206. Esta teoría ha sido extendida á la Geometría no euclidiana y estudiada desde otros puntos de vista por Klein: *Mathem. Ann.*, 1871, t. IV, páginas 573 y siguientes.—(*N. A.*)

BB', CC' ....., que forman una involución. Si trazamos ahora por el punto S, en el plano Q, la recta a'_1 perpendicular á la a y la a_1 perpendicular á la a', las a y a_1 se cortan en el punto A y las a' y a'_1 en el A', es decir, la recta e corta á la involución absoluta que en el plano Q corresponde al punto S en la misma involución $AA'.BB'.CC'$ ..... antes obtenida. Podemos llamar á esta involución, contenida en e, la involución absoluta del plano Q; cada dos pares de la misma están separados entre sí y no tiene puntos de coincidencia.

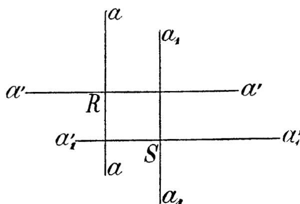


Fig. 67.

139. De modo esencialmente distinto ocurren las cosas dentro de la hipótesis á la cual corresponde la Geometría no euclidiana. Aquí son diferentes los puntos R' y S' y las rectas r y s, y el punto rs es el polo absoluto de la recta RS en el plano Q; la misma relación existe entre el punto st y la recta ST y entre el punto rt y la recta RT. Si las rectas r, s y t pasan por un punto, los puntos R, S y T están en una recta; pues, entonces, aquel punto es polo absoluto de las rectas RS y RT y, por tanto, éstas coinciden. De aquí se sigue, que si A, B, C y D son puntos propios del plano Q, no situados de tres en tres en línea recta, y a, b, c y d sus polares absolutos en dicho plano, estas rectas no pasan de tres en tres por un punto, y, por consiguiente, los pares Aa, Bb, Cc y Dd determinan en el plano Q una correlación, en la cual á las rectas AB, AC y AD corresponden sus polos absolutos B', C' y D' (esto es, ab, ac y ad).

Designemos por P un quinto punto propio del plano Q y por P' el punto correspondiente á la recta AP (punto que, como los B', C' y D', está situado en la recta a). Las figuras $A(BCDP)$ y $B'C'D'P'$ son proyectivas, y las $B'C'D'P'$ y $A(B'C'D'P')$ perspectivas, luego las $A(BCDP)$ y $A(B'C'D'P')$ son proyectivas; ahora, los rayos AB y AB', así como los AC y AC' y los AD y AD' son conjugados en la involución

absoluta de vértice A; por consiguiente, lo mismo sucede á los AP y AP', es decir, P' es polo absoluto de AP. De igual modo, resultan como puntos homólogos de las rectas BP, CP y DP en aquella correlación, sus polos absolutos; por tanto, la recta homóloga del punto P es su polar absoluta. En general, á cada punto propio corresponde su polar absoluta y á cada recta propia su polo absoluto, y la correlación es independiente de los puntos A, B, C y D.

Si A_1 y B_1 son los puntos homólogos de las rectas AB' y BB' y, por consiguiente, A_1B_1 es la recta homóloga del punto B', considerado como de la primera figura, ambos puntos, A_1 y B_1, están en la recta AB, luego ésta es en la segunda figura homóloga del punto B' de la primera; análogamente, AC es la recta homóloga del punto C'', luego A es el punto de la segunda figura homóloga de la recta a de la primera. Como, según esto, también los pares aA, bB, cC y dD forman parte de la correspondencia considerada, podemos afirmar que ésta es un sistema polar, al cual llamaremos el sistema polar absoluto del plano Q (*).

140. Prescindiendo ahora de la consideración exclusiva de figuras planas y sin hacer distinción especial entre la Geometría euclidiana y las no euclidianas, tomemos una recta e que pase por un punto propio P, tres rectas f, g y h perpendiculares á la e en el punto P y un rayo arbitrario k del haz fg. Designemos por A y B puntos propios, respectivamente situados en las rectas f y g, á diferentes lados de la k, tales, por tanto, que esta recta es cortada por la AB en un punto propio C, y llevemos sobre la recta e los segmentos PD y PD' congruentes. Enton-

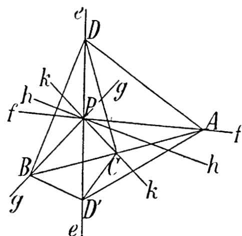


Fig. 68.

(*) El autor, consecuente con las denominaciones antes establecidas, llama reciprocidad polar á la correspondencia y sistema polar absoluto al conjunto de pares de elementos homólogos. Nosotros usaremos este último nombre para designar indistintamente ambas cosas.—(*N. T.*)

ces son congruentes AD y AD', así como BD y BD', luego también lo son ABD y ABD', $ABDC$ y $ABD'C$, DC y $D'C$ y PCD y PCD'; por consiguiente, la recta e es perpendicular á la k. De aquí se sigue que los planos eh y fg se cortan en una recta perpendicular á la e y, por tanto, coincidente con la h, es decir, que la recta h está en el plano fg. Según esto, el lugar de todas las rectas perpendiculares á la e en el punto P es un plano E; la recta e y el plano E se llaman perpendiculares entre sí.

Por todo punto propio pasa un plano, y sólo uno, perpendicular á una recta propia dada.

Si e' es una recta perpendicular al plano E en el punto Q, la recta f' del plano E, que es perpendicular á la PQ en el punto Q, lo es también á la e'; llevando, pues, sobre la f' los segmentos congruentes QF y QG, también serán congruentes PF y PG y, además, DF y DG y DQF y DQG; por consiguiente, la recta f' es perpendicular á la DQ y, más general, al plano eQ, luego la recta e' pertenece á este plano (Euclides, XI, 6). Según esto, por todo punto propio R pasa una recta r, y sólo una, perpendicular á un plano propio dado E; pues, si el punto R está en el plano E y se trazan en este plano, por aquel punto, dos rectas s y t y, por el mismo punto, los planos S y T respectivamente perpendiculares á dichas rectas s y t, la ST es perpendicular al plano st; si, por el contrario, el punto R no está en el plano E, trazando la recta e' perpendicular á éste en uno de sus puntos propios Q, la recta buscada r debe estar en el plano Re', etc.

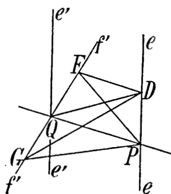


Fig. 69.

141. Todas las perpendiculares á un plano propio pasan por un punto (impropio), al cual llamaremos polo absoluto del plano. Este punto es asociado de todos los puntos propios del plano; toda recta propia trazada por él es perpendicular al plano; y, respecto de toda recta propia del plano, es su polo absoluto. Si por una recta propia se trazan dos planos E y E', de manera que el E' contenga el polo absoluto del E, el polo absoluto del E' estará en el E, y toda recta perpen-

dicular á la EE', trazada en uno de los planos, es perpendicular al otro; estos planos se llaman perpendiculares.

Todo plano que contiene una recta perpendicular á otro, es perpendicular á éste.

Si, por un punto propio, se trazan tres planos perpendiculares dos á dos, cada dos de sus rectas de intersección son perpendiculares entre sí.

142. Tracemos ahora por la recta propia r los pares de planos perpendiculares AA', BB', CC'..... y por el punto propio P de la recta r un plano perpendicular á ésta. Este plano corta á aquellos pares en los pares de rectas aa', bb', cc'..... que pasan por el punto P y forman una involución. Por consiguiente, también los pares de planos AA', BB', CC'..... forman una involución, á la cual llamaremos involución absoluta en el haz de planos r. Cada dos pares de la misma están separados entre sí, y no existen planos de coincidencia.

143. Para estudiar más á fondo la congruencia en el haz de planos estableceremos primero el siguiente teorema:

Si A, B, C..... *son planos que pasan por la recta propia* r *y* abc..... *y* a'b'c'..... *las secciones producidas en el haz* ABC..... *por planos perpendiculares á su arista en los puntos* P *y* P', *respectivamente, los haces de rectas* abc..... *y* a'b'c'..... *son congruentes.*

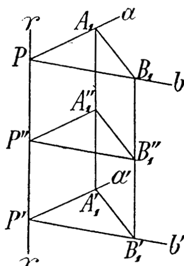


Fig. 70.

En efecto, llevemos sobre a y a', b y b', c y c',.... los pares de segmentos congruentes PA_1 y $P'A'_1$ y PB_1, $P'B'_1$, PC_1 y $P'C'_1$,....., de manera que los de cada par estén del mismo lado de la recta r y sea P'' el punto medio del segmento PP': el plano perpendicular á la arista r en el punto P'' cortará á los segmentos $A_1A'_1$ y $B_1B'_1$ en puntos A''_1 y B''_1, respectivamente. Por ser congruentes las figuras $P''A''_1PA_1$ y $P''A''_1P'A'_1$, asi como las $P''B''_1PB_1$ y $P''B''_1P'B'_1$, A''_1 es el punto medio de $A_1A'_1$, B''_1 el de $B'B'_1$, $P''A''_1$ es perpendicular á $A_1A'_1$ y $P''B''_1$ es perpendicular á $B_1B'_1$. El plano $P''A''_1B''_1$ es perpendicular á la recta r y, por tanto, al plano A y á las rectas $A_1A'_1$ y $B_1B'_1$, se-

gún lo cual estas dos rectas son perpendiculares á la $A''_1 B''_1$, luego la figura $A''_1 B''_1 A_1 B_1$ es congruente con la $A''_1 B''_1 A' B'$ y, por consecuencia, lo son $A_1 B_1$ y $A'_1 B'_1$, así como $PA_1 B_1$ y $P'A'_1 B'_1$; análogamente, son también congruentes $P_1 A_1 C_1$ y $P'A'_1 C'_1$, etc. Ahora, si B_1 y C_1 están al mismo lado de a, los pares $B_1 C_1$, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$ y $B'_1 C'_1$ estarán al mismo lado de A, luego B'_1 y C'_1 están al mismo lado de a'; si, por el contrario, B_1 y C_1 están á distintos lados de a, B'_1 y C'_1 están á distintos lados de a'. Por consiguiente, $PA_1 B_1 C_1$ y $P'A'_1 B'_1 C'_1$ son congruentes y, más general, lo son $PA_1 B_1 C_1 D_1$..... y $P'A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$..... luego también abc..... y $a'b'c'$.....

144. La congruencia que se acaba de establecer entre $PA_1 B_1 C_1$ ..... y $P'A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ ..... puede ser ampliada; en ella se corresponden consigo mismos r, A, B, C, ..., y la congruencia que resulta sobre la recta r es directa, pues si fuera inversa los puntos P'', A''_1 y B''_1 no situados en línea recta deberían ser homólogos de sí mismos. Luego

Una recta propia r, *considerada como de coincidencia, y dos de sus puntos* P *y* P', *como homólogos, determinan una congruencia, y sólo una, en la cual las series homólogas de base* r *son congruentes directas y cada dos puntos propios homólogos están en un plano con la recta* r *y al mismo lado de ella.*

En esta congruencia, cada plano del haz r se corresponde consigo mismo, y cada figura situada en uno de estos planos aparece trasladada en el mismo á lo largo de la recta r. En general, cuando una figura se transforma en otra por medio de una congruencia de esta naturaleza se dice que se ha trasladado á lo largo de la recta r.

145. *Si dos haces de planos* ABC ..... *y* A'B'C'....., *de la misma arista propia* r, *son congruentes y se cortan por un plano perpendicular á su arista, los haces de rectas (concéntricos)* abc ..... *y* a'b'c'..... *obtenidos son congruentes.*

En efecto, los dos haces de planos son figuras homólogas en una congruencia, en la cual la recta r se corresponde consigo misma. El plano homólogo del ab de esta congruencia, el cual es asimismo perpendicular á la arista r, corta al haz $A'B'C'$ ..... según un haz de rectas $a_1 b_1 c_1$.....; aa_1, bb_1, cc_1..... son pares de elementos homólogos; luego el haz abc..... es congruente con el $a_1 b_1 c_1$.....; además, son congruentes (**143**) $a'b'c'$ ..... y $a_1 b_1 c_1$.....; luego también abc..... y $a'b'c'$......

Las figuras AB *y* BA *son congruentes*.

Pues si el plano A no es perpendicular al B, en el haz r hay un plano P, y sólo uno, diferente del A, tal que las figuras AB y PB sean congruentes, y el plano armónicamente separado del B por los A y P es perpendicular al B.

La congruencia de los haces de rectas abc ..... y $a'b'c'$ ..... (**137**, 7.°) es directa para todas las posiciones de su plano perpendicular á r ó es inversa para todas. En el primer caso, la congruencia de los haces de la misma arista ABC..... y $A'B'C'$ ..... se llama directa y en el segundo inversa. Si la congruencia es directa, ó todos los planos se corresponden consigo mismos, ó no hay ninguno con esta propiedad; la relación está determinada por dos planos homólogos y, en general, no es involutiva; la involución absoluta del haz r es la única que se presenta como congruencia directa. Pero si la congruencia es inversa, es involutiva y tiene dos planos de coincidencia, perpendiculares entre sí.

146. *Existe una congruencia, y sólo una, en la cual se corresponden consigo mismos todos los puntos de la recta* r *y el semiplano* rF *se transforma en el* rF'.

Todo plano P perpendicular á la recta r se corresponde consigo mismo en esta congruencia, y sobre él resultan dos haces de rectas congruentes de vértice rP; estos haces son congruentes, pues de no ser así habría en el plano P puntos propios, diferentes del rP, homólogos de sí mismos; toda figura contenida en el plano P gira, pues, alrededor del punto rP, y la recta r es arista de dos haces de planos congruentes. Cuando una figura se transforma en otra por medio de esta congruencia, se dice que gira alrededor del eje r.

Toda traslación se puede reducir á dos giros, y toda congruencia á una traslación y dos giros.

147. Para establecer el sistema polar absoluto no era preciso considerar la congruencia en el haz de planos. Volvamos ahora á la generación del sistema polar absoluto en un punto propio P, anteponiendo las siguientes observaciones:

Si la recta e describe un haz de vértice P, el plano E, perpendicular en P al rayo e, describe un haz de planos cuya arista es la perpendicular en P al plano del haz. Si el plano E describe un haz en la radiación P, la recta perpendicular al plano E en el punto P describe un haz, cuyo plano es per-

pendicular en P á la arista del primero. En ambos casos, las figuras engendradas por la recta e y el plano E son proyectivas, pues si el plano P es cortado por el del haz de rectas en f, las rectas e y f son perpendiculares y describen figuras proyectivas, y el plano E y la recta f engendran figuras perspectivas.

Si trazamos ahora por P cuatro rectas a, b, c y d, tales que de tres en tres no estén en un plano, y los planos A, B, C y D perpendiculares á ellas en P, de los cuales no habrá tres que pasen por una recta, los pares aA, bB, cC y dD determinan una correlación en la radiación P. Sean e una recta cualquiera que pasa por P, e' la perpendicular en P al plano ae, y b_1, c_1, d_1 y e_1 los rayos homólogos de los planos ab, ac, ad y ae, respectivamente, los cuales, así como el e', estarán situados en el plano A, siendo la recta b_1 perpendicular al plano ab, la c_1 al ac y la d_1 al ad. Los haces de rectas $b_1c_1d_1e_1$ y $b_1c_1d_1e'$ son, entonces, proyectivos con el haz de planos $a(bcde)$ y, por tanto, proyectivos entre sí, luego el rayo e' es el mismo e_1, y éste es perpendicular al plano ae. Análogamente, los planos be, ce y de determinan rectas perpendiculares homólogas y, por consiguiente, la e un plano perpendicular homólogo, de manera que en la radiación P corresponden á cada recta el plano perpendicular y á cada plano la recta perpendicular. La correlación es, pues, independiente de las rectas a, b, c y d, y es una polaridad, puesto que también los pares Aa, Bb, Cc y Dd forman parte de ella; la llamaremos sistema polar absoluto del punto P.

Las polares absolutas del punto propio P en todos los planos de la radiación P se cortan de dos en dos, pero sin pasar todos por un punto, luego están en un plano; este plano es el lugar de los puntos asociados al P y el de los polos absolutos de todos los planos de la radiación P, y lo llamaremos polar absoluto (plano-polar) del punto P.

Los polos absolutos de la recta r en todos los planos del haz r, unidos al punto propio A de la recta r, dan rectas perpendiculares á la r, las cuales forman, por tanto, un haz cuyo plano R es perpendicular á la recta r en el punto A, luego aquellos polos están en este plano y, como son puntos asociados al A, en la polar absoluta de este punto en el plano R; esta recta recibe el nombre de polar absoluta de la r. Todo

plano R perpendicular á la recta r pasa por la polar absoluta de ésta, la cual es polar absoluta del punto rR en el plano R; todo punto propio de la recta r tiene un plano polar que pasa por la polar absoluta de la recta r, y todo plano que pasa por la recta r tiene un polo absoluto que pertenece á la polar absoluta de la recta r.

148. Sean ahora A, B, C, D y E puntos propios, que de cuatro en cuatro no están en un plano, y A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1 sus planos polares absolutos; los A_1 y B_1 contienen la polar absoluta de la recta AB; esta recta es cortada por el plano A_1 en el punto A' asociado al A, y por el B_1 en el punto B' asociado al B. En la Geometría euclidiana coinciden los puntos A' y B' y, por tanto, también los planos A_1 y B_1, es decir, que en ella todos los puntos propios tienen el mismo plano polar absoluto, el cual es impropio y puede llamarse plano absoluto, y corta á cada plano propio en su recta absoluta.

Si se designa por M un punto del plano absoluto y por m la polar absoluta de la recta MA, la cual es, por consiguiente, la recta absoluta de un plano perpendicular á la MA, el punto M es polo absoluto de este plano que, según esto, también es perpendicular á la recta MB; luego, también esta recta tiene como polar absoluta la m, es decir, que el punto M determina por completo la recta m.

Si aquel punto varía, los pares formados por la recta AM y el plano Am constituyen un sistema polar, el sistema polar absoluto del punto A, el cual es cortado por el plano absoluto en un sistema polar engendrado por los pares que forman el punto M y la recta m. Este sistema puede llamarse sistema polar absoluto.

149. En la Geometría no euclidiana, son diferentes uno de otro los puntos A' y B' y los planos A_1 y B_1, la recta A_1B_1 es la polar absoluta de la AB, igualmente, la A_1C_1 es polar absoluta de la AC, etc. Como los puntos A, B y C no están en una recta, los planos A_1, B_1 y C_1 sólo tienen común un punto, pues si los tres pasasen por una recta, ésta sería polar absoluta de las AB y AC, las cuales serían perpendiculares á un plano en el punto A. El punto $A_1B_1C_1$ es el polo absoluto del plano ABC; igualmente, el punto $A_1B_1D_1$ es polo absoluto del plano ABD, etc. Si los planos A_1, B_1, C_1 y D_1 tuviesen un punto común, éste sería polo absoluto de los planos ABC

y ABD, los cuales serían perpendiculares á una recta en el punto A, luego dichos planos A_1, B_1, C_1 y D_1 no pasan por un punto, propiedad común á cada cuatro de los planos A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1.

Los pares de elementos AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 y EE_1 determinan una correlación, en la cual, á los planos ABC, ABD y ABE corresponden sus polos absolutos C', D' y E' (esto es, los puntos $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_1$ y $A_1B_1E_1$). Designemos por P un sexto punto propio, por P' el punto homólogo del plano ABP (el cual estará, junto con los C', D' y E', en la recta A_1B_1) y por r la recta AB. Las figuras $r(CDEP)$ y $C'D'E'P'$ son proyectivas, y las $C'D'E'P'$ y $r(C'D'E'P')$ perspectivas; por consiguiente, las $r(CDEP)$ y $r(C'D'E'P')$ son proyectivas: ahora bien, los planos rC', rD' y rE' son respectivamente, perpendiculares á los rC, rD y rE, luego también lo es el rP' al rP, es decir, P' es el polo absoluto del plano rP. Según esto, á los planos ABP, ACP, BCP, ... corresponden sus polos absolutos y al punto P el plano de estos polos, esto es, el plano polar absoluto del punto P. Resulta, pues, que en aquella correlación á cada punto propio corresponde su plano polar absoluto y á cada plano propio su polo absoluto, y la correlación es independiente de los puntos A, B, C, D y E.

Sean ahora L, M y N los puntos homólogos de los planos BCC', CAC' y ABC' y, por tanto, LMN el plano homólogo del punto C'; los planos BCC', CAC' y ABC' son perpendiculares al ABC, luego los puntos L, M y N están en el plano ABC, el cual corresponde al punto C'; análogamente, al punto D' corresponde el plano ABD, luego á la recta A_1B_1 (esto es, $C'D'$) la AB, y del mismo modo, á la A_1C_1 la AC y, por consiguiente, al plano A_1 el punto A. Se ve, pues, que los pares A_1A, B_1B, C_1C, D_1D y E_1E pertenecen á la correlación, luego ésta es una polaridad; la llamaremos sistema polar absoluto. El sistema polar absoluto de la Geometría no euclidiana no es focal.

150. Tanto en la Geometría euclidiana, como en la no euclidiana, por medio del sistema polar absoluto cada punto propio determina su plano polar absoluto, cada recta propia su polar absoluta y cada plano propio su polo absoluto. Al pasar de una figura á otra congruente con ella, el sistema polar absoluto se corresponde consigo mis-

mo. No analizaremos aquí hasta qué punto queda determinada la relación por esta propiedad; sin embargo, para concluir, no estará fuera de lugar agregar una consideración, para la cual hemos antepuesto el teorema 13.° del artículo anterior.

Si A, B y C son tres puntos propios dados, no situados en línea recta, en virtud del teorema que acabamos de citar, mediante una distribución conveniente de las letras, la perpendicular trazada por el punto A á la recta BC encuentra á ésta en un punto A', comprendido entre los B y C. Sea AA_1 la semirecta opuesta á la AA'; tracemos ahora en el plano ABC la recta perpendicular á la AA' en el punto A, y llamemos AD á la semirecta de ésta situada al mismo lado de AA' que el punto B, y AD' á la opuesta, la cual estará, por tanto, al mismo lado que C; el punto D_1 de intersección de BC y DD' es, pues, asociado al A'. Sea M el punto medio del segmento AB; llevemos sobre la recta MA' el segmento ME congruente con el MA', con lo cual los puntos B y E quedan al mismo lado de AA'. Efectuando ahora en el plano ABC un giro alrededor del punto M, de tal modo que el punto A venga á coincidir con el B y, por tanto, el E con el A' y la recta AE con la BC, todos los puntos del plano asociados al M permanecen fijos y, en consecuencia, las rectas AE y BC se encuentran en un punto E_1 asociado al M. El punto E está definido en el plano ABC por la condición de ser congruentes ABA' y BAE, y la de estar C y E á diferentes lados de AB. De modo análogo queda definido en el plano ABC otro punto E', tal que las figuras ACA' y CAE' son congruentes y los puntos B y E' están á diferentes lados de AC; los E' y C se hallan al mismo lado de AA'.

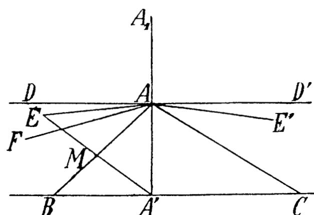


Fig. 71.

En la Geometría euclidiana coinciden los puntos D_1 y E_1 y, por consiguiente, también las semirectas AD y AE, AD'

y AE'. «La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano.»

En el caso de la Geometría no euclidiana, designemos por F_1 y F_2 los puntos asociados al B en las rectas BC y AB, respectivamente, y por AF la semirecta de AF_1 situada al mismo lado de AA' que B. Los puntos A y B están separados por los M y F_2; lo mismo sucede á sus polares absolutas y á los puntos en que éstas cortan á la recta BC, es decir, D_1 y F_1 están separados por B y E_1 y, por consiguiente, AD y AF lo están por AE y AB. Ahora, la semirecta AB no está entre las AD y AF, luego la AE deberá estar entre ambas.

En la Geometría no euclidiana (**113**), no hay en cada recta propia ningún par de la involución absoluta separado por otro, ó todo par está separado por cada uno de los demás, y respecto de esta propiedad, todas las rectas propias se comportan de igual manera. El primer supuesto conduce á la Geometría de Gauss, y el segundo á la de Riemann (*).

En la Geometría de Gauss, los puntos A_1 y D_1 de la recta BC no están separados por los B y F_1 y, por consiguiente, las rectas AA' y AD no están separadas por las AB y AF. La semirecta AB está entre las AA' y AD, luego lo mismo sucede á la AF y, finalmente, á la AE; análogamente, la semirecta AE' está entre las AA' y AD'. «La suma de los ángulos de un triángulo es menor que un ángulo llano.»

En la Geometría de Riemann, los puntos A' y D_1 de la recta BC están separados por los B y F_1; por consiguiente, la semirecta AF no está entre las AA' y AD, sino entre las AD y AA_1 y lo mismo sucede á la AE; al mismo tiempo, la AE' está entre las AA_1 y AD'. «La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que un ángulo llano.»

(*) Véase Baltzer: *Die Elemente der Mathematik*, tomo II, «Planimetrie» § **2**, así como el Prólogo de la 6.ª edición, 1883.

Klein ha designado las tres clases de Geometría con los nombres de parabólica, hiperbólica y elíptica (**), *Mathem. Ann.*, 1871, tomo IV, página 577.—*(N. A.)*

(**) Véase la 2.ª nota de la pág. 25.—*(N. T.)*

Adición al § 20.

(Véase *Mathematische Annalen*, 1887, tomo XXX, pág. 128.)

En la clasificación hecha en el artículo anterior (**150**), hemos llamado *Geometría de Riemann* á aquella en que la suma de los ángulos de cada triángulo es mayor que un ángulo llano, por haber sido Riemann el primero en enunciar tal posibilidad, siquiera no haya analizado este caso de un modo completo. Esto ha sido realizado primeramente por Killing.

De acuerdo con lo explicado en el § **1** (**12**), consideramos solamente figuras de extensión limitada, prescindiendo de agregar un número arbitrario de tales figuras. Por esta razón, no hemos necesitado preocuparnos de si toda radiación de rectas tiene vértice, y cuántos son éstos. Esta cuestión no se presenta si no es colocándose en otro punto de vista, y la solución conduce á distinguir diversas formas tipos de Geometría elíptica.

(Véase Killing: *Die Nicht-Euklidische Raumformen in Analytische Behandlung*, 1885, artículos 11, 16 y 17, así como la noticia bibliográfica, nota 4.ª)

§ 21.—Razones dobles

151. Los conceptos matemáticos forman un grupo independiente dentro de los que sirven para la descripción del mundo externo, pudiendo unirse entre sí mediante una serie de relaciones sin necesidad de acudir á otros conceptos extraños á ellos.

De igual modo, dentro de la Matemática puede separarse el grupo de conceptos que constituyen el objeto de la Teoría de los números (Aritmética, Algebra, Análisis). La Geometría añade otros conceptos á los suyos propios; estos últimos no forman, sin embargo, un grupo independiente, pues sólo pueden relacionarse entre sí mediante la admisión del concepto de número, en lo cual se funda la aplicación del Análisis á la Geometría.

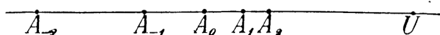
El uso más frecuente del número en la Geometría se realiza en la medición. Toda medición puede reducirse al caso más sencillo en que una figura, por ejemplo, un segmento rectilíneo, se compone de varias congruentes y se cuentan éstas. La operación de llevar sobre una recta, uno á continuación de otro, segmentos congruentes, es una construcción en virtud de la cual, apoyándose en el axioma IV del § **13** (**82**), se pueden introducir números correspondientes á los puntos de las rectas. Pero también los conceptos de red y pares equivalentes, establecidos en el § **15**, nos ofrecen otro medio para la introducción de números que correspondan á los elementos

de una figura de primera categoría, ejecutando repetidamente una cierta construcción proyectiva y contando el número de las construcciones efectuadas.

152. Sean U, A_0, A_1, ... elementos arbitrarios de una figura de primera categoría. Construyendo los pares A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., equivalentes respecto del elemento límite U, se obtiene una red. Ampliemos ahora este concepto mediante la consideración de los pares A_1A_0, A_0B_1, B_1B_2, ..., asimismo equivalentes respecto del elemento límite U. Representaremos también los elementos B_1, B_2, ... así introducidos, los cuales son diferentes entre sí y de los U, A_0, A_1, A_2, A_3, ..., por la notación

$$A_{-1},\ A_{-2},\ .....$$

y diremos que son los elementos de la red que ocupan los lugares — 1, — 2, ...



Si λ *y* μ *representan números enteros cualesquiera, los pares de elementos* $A_\lambda A_{\lambda+1}$ *y* $A_\mu A_{\mu+1}$ *son equivalentes respecto del elemento* U; *la figura* $A_{\lambda-1}A_{\lambda+1}A_\lambda U$ *es armónica y los tres elementos* U, A_0 *y* A_λ *determinan sin ambigüedad el* A_1, *tal que* A_λ *sea el* λ^{esimo} *elemento de la red* UA_0A_1.

Dado en la misma figura un elemento arbitrario P, diferente del U, se puede hallar el número entero n, tal que el n^{esimo} elemento de la red coincida con el P ó esté separado del $(n+1)^{esimo}$ por los P y U. Pues si el elemento P es diferente de los A_0, A_1 y B_1, ó están separados los A_0 y A_1 por los P y U, ó los A_0 y P por los A_1 y U, ó los A_1 y P por los A_0 y U; en el primer caso, basta tomar $n = 0$; el segundo caso se ha examinado ya en el § **15** (**97**), y en el tercer caso, como A_1 y B_1 están separados por A_0 y U, no lo están B_1 y P por A_0 y U; sino que, ó están separados A_0 y B_1 por P y U, y entonces se tomará $n = -1$, ó lo están A_0 y P por B_1 y U, en cuyo caso se puede aplicar el teorema antes citado (**97**) á la red UA_0B_1.

153. En la Geometría euclidiana ofrece un particular interés el caso en que A_0 y A_1 son puntos propios y U es el punto absoluto de la recta A_0A_1. La equivalencia determinada

por el par de puntos correspondientes A_0A_1 y el punto límite U es, entonces, en virtud de lo dicho en el núm. **134**, una congruencia directa sobre la recta A_0A_1 y, por consiguiente, los pares $A_\lambda A_{\lambda+1}$ y $A_\mu A_{\mu+1}$ son directamente congruentes. El valor absoluto del número λ indica en cuántos segmentos directamente congruentes con A_0A_1 se puede descomponer el segmento A_0A_λ, si λ es positivo, ó el $A_\lambda A_0$, si es negativo. Por esta razón, al número λ se le llama razón de los dos segmentos A_0A_λ y A_0A_1 y, más general, al número $\frac{\lambda}{\mu}$ razón de los segmentos A_0A_λ y A_0A_μ, pudiendo substituirse cada segmento por otro directamente congruente con él.

Si P es el λ^{esimo} elemento de una red cualquiera UA_0A_1, al número entero λ, completamente determinado por U, A_0, A_1 y P, lo llamaremos índice del elemento P en la red UA_0A_1, ó, también, índice de los pares A_0P y A_0A_1 respecto del elemento límite U, y lo representaremos así:

$$\overset{UA_0A_1}{\text{ind}}\, P = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0P \\ A_0A_1 \end{pmatrix} = \lambda,$$

de tal manera, pues, que

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0A_0 \\ A_0A_1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0A_1 \\ A_0A_1 \end{pmatrix} = 1,$$

según lo cual, podemos llamar al par A_0A_1 par unidad.

Si designamos por MN un par equivalente al par unidad respecto del elemento U en la misma figura (siendo M y N diferentes entre sí y de U), se puede determinar sin ambigüedad el elemento A_1 y, por consiguiente, en general, el par unidad por medio de los elementos M, N y A_0. En atención á esta circunstancia, llamaremos también al número λ índice de los pares A_0P y MN respecto del elemento límite U; lo denotaremos así:

$$\lambda = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0P \\ MN \end{pmatrix}$$

y diremos que el par MN es un par unidad. Todo par equivalente al MN respecto del elemento U es un par unidad y, para todo índice diferente de cero, todos los pares unidad son equivalentes respecto del elemento U.

154. En el presente artículo consideraremos exclusivamente elementos de una sola figura de primera categoría. En este supuesto, la ecuación

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}=0$$

significa que P y Q coinciden. La ecuación

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}=1$$

indica que los pares PQ y MN son equivalentes respecto del elemento U. Finalmente, la ecuación

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}MO\\MN\end{pmatrix}=-1$$

denota que la figura $NOMU$ es armónica. Es de advertir que en todo esto suponemos que M, N, O, P y Q son diferentes de U y que también lo son uno de otro M y N.

155. *Dados tres elementos diferentes* P, Q *y* U, *se puede determinar un par unidad* MN, *de tal modo que el índice de los pares* PQ *y* MN *respecto del elemento* U *sea un número entero arbitrario* λ, *distinto de cero.*

En efecto; se puede hallar el elemento R, tal que Q sea el λ^{esimo} elemento de la red UPR, y entonces basta hacer que el par MN sea equivalente al PR respecto del elemento U.

156. *Si los pares* PQ *y* P′Q′ *son equivalentes respecto del elemento límite* U *y es*

$$\lambda=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix},$$

también será

$$\lambda=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}P'Q'\\MN\end{pmatrix}.$$

En efecto; construyendo los pares PR y $P'R'$ equivalentes al MN (y, por tanto, entre sí) respecto del elemento U, tendremos, desde luego,

$$\lambda=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\PR\end{pmatrix}.$$

Ahora bien; como esta ecuación expresa una propiedad proyectiva de la figura $UPQR$, debe satisfacerse por toda figura proyectiva con esto; pero PP', QQ' y RR' son pares de elementos homólogos de una equivalencia con el elemento límite U (**114**) y, por consiguiente, las figuras $UPQR$ y $U'P'Q'R'$ son proyectivas, luego será

$$\lambda = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} P'Q' \\ P'R' \end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} P'Q' \\ MN \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente: *Si los pares* PQ *y* P′Q′ *relacionados con un cierto par unidad dan el mismo índice respecto del elemento* U, *serán equivalentes respecto de este elemento*. Pues, hallando el par PR equivalente al par unidad y el PS equivalente al $P'Q'$, respecto del elemento U, será

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ PR \end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} P'Q' \\ PR \end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PS \\ PR \end{pmatrix};$$

es decir, los elementos Q y S tienen índices iguales en la red UPR y, por tanto, no pueden ser diferentes uno de otro.

157. En virtud de lo dicho, se puede substituir, no sólo el par MN, sino también el PQ por cualquier otro equivalente respecto del elemento U, pero sólo por éstos. Por consiguiente, si se cambia MN por NM, ó PQ por QP, el índice sufrirá variación si es diferente de cero. Supongamos, por ejemplo, que

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} = \lambda$$

sea positivo. Construyendo entonces los pares A_1A_0, A_0B_1, B_1B_2, ..., $B_{\lambda-1}B_\lambda$ equivalentes al MN respecto del elemento U, de manera que sea

$$\lambda = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0B_\lambda \\ A_0B_1 \end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0B_\lambda \\ MN \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, que A_0B_λ y PQ sean equivalentes respecto de U y, además, que lo sean $B_\lambda B_{\lambda-1}$, $B_{\lambda-1}\ B_{\lambda-2}$, ...,

$B_1 A_0$, $A_0 A_1$ á NM, y $B_\lambda A_0$ á QP, resultará que B_λ es el $(-\lambda)^{esimo}$ elemento de la red UA_0A_1 y A_0 el λ^{esimo} de la red $UB_\lambda B_{\lambda-1}$, es decir,

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} A_0 B_\lambda \\ A_0 A_1 \end{pmatrix} = -\lambda, \quad \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} B_\lambda A_0 \\ B_\lambda B_{\lambda-1} \end{pmatrix} = \lambda,$$

ó bien

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ NM \end{pmatrix} = -\lambda, \quad \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ NM \end{pmatrix} = \lambda$$

y, por consiguiente,

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ MN \end{pmatrix} = -\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ NM \end{pmatrix} = -\lambda.$$

Se obtienen las mismas relaciones suponiendo que

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} = \lambda = -\mu$$

sea negativo. Si, pues, los pares PQ y MN tienen un índice respecto del elemento U, será

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} = -\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ NM \end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ NM \end{pmatrix},$$

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} = -\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ MN \end{pmatrix}.$$

158. La ecuación así obtenida

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} + \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QP \\ MN \end{pmatrix} = 0$$

puede generalizarse, mediante la introducción de otro elemento R, en la siguiente forma:

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} PQ \\ MN \end{pmatrix} + \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} QR \\ MN \end{pmatrix} + \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix} RP \\ MN \end{pmatrix} = 0,$$

siempre que tales índices existan. Para demostrar esta nueva relación observemos, en primer lugar, que no varía cuando se permutan circularmente los elementos P, Q y R ó se substituyen uno por otro los P y Q (esto es, PQR por QPR) y, por consiguiente, de un modo general cuando se permutan arbi-

trariamente P, Q y R. Ahora bien, como dos, al menos, de los tres sumandos tienen signos iguales, distribuyendò convenientemente las letras podemos suponer que los dos primeros sumandos

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PQ}{MN}=m, \quad \overset{U}{\text{ind}}\binom{QR}{MN}=n$$

tienen el mismo signo y que éste es el positivo, y basta demostrar la relación en esta hipótesis. Para ello, construyamos los pares A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{m-1}A_m$, A_mA_{m+1}, ..., $A_{m+n-1}A_{m+n}$, equivalentes al MN respecto del elemento U; entonces serán A_0A_m equivalente á PQ, y A_mA_{m+n} á QR, luego (**101**) A_0A_{m+n} lo será á PR, es decir,

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PR}{MN}=m+n, \quad \overset{U}{\text{ind}}\binom{RP}{MN}=-m-n.$$

Considerando ahora en un cierto orden los elementos P, Q, R, S y, más general, los R_1, R_2 ....., R_{n-1}, todos diferentes del U, tendremos

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PQ}{MN}=\overset{U}{\text{ind}}\binom{PR}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{RQ}{MN}$$

y, análogamente,

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{RP}{MN}=\overset{U}{\text{ind}}\binom{RS}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{SP}{MN},$$

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{RQ}{MN}=\overset{U}{\text{ind}}\binom{RS}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{SQ}{MN},$$

luego, también

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PQ}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{QR}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{RS}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{SP}{MN}=0,$$

ó bien

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PQ}{MN}=\overset{U}{\text{ind}}\binom{PR}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{RS}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{SQ}{MN}$$

y, en general,

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{PQ}{MN}=\overset{U}{\text{ind}}\binom{PR_1}{MN}+\overset{U}{\text{ind}}\binom{R_1R_2}{MN}+.....+\overset{U}{\text{ind}}\binom{R_{n-1}Q}{MN},$$

siempre en la hipótesis de que existan tales índices. Por lo demás, es fácil ver en cuanto á esto que la existencia de un índice de los pares PQ y MN respecto del elemento U, es consecuencia de la de los índices

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR\\MN\end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}RQ\\MN\end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, también de la de los

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR_1\\MN\end{pmatrix}, \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}R_1R_2\\MN\end{pmatrix}, \ldots\ldots, \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}R_{n-1}Q\\MN\end{pmatrix}.$$

159. Si los n pares PR_1, R_1R_2 ....., $R_{n-1}Q$ son equivalentes respecto del elemento U, y P es diferente de R_1, se obtiene

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix} = n\ \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR_1\\MN\end{pmatrix}; \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\PR_1\end{pmatrix} = n; \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\R_1P\end{pmatrix} = -n$$

y, por consiguiente,

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\PR_1\end{pmatrix} \cdot \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR_1\\MN\end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\R_1P\end{pmatrix} \cdot \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}R_1P\\MN\end{pmatrix}.$$

Siempre, pues, que respecto del elemento U existan índices de los pares PQ y AB y de los AB y MN, quedará satisfecha la ecuación

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\AB\end{pmatrix} \cdot \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}AB\\MN\end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}.$$

En general, si los pares PQ *y* AB, *así como los* AB *y* MN, *tienen índices respecto del elemento* U, *sin que* P *y* Q *coincidan, los tres pares determinan índices respecto de* U *con un par unidad convenientemente elegido,* pues mediante elección adecuada de los elementos A', B', M' y N' se tiene

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}AB\\A'B'\end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}, \quad \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}MN\\M'N'\end{pmatrix} = \overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\AB\end{pmatrix}$$

do en ellos se introduce el concepto generalizado de índice. En las demostraciones se utiliza la propiedad de que si los pares CD y M_1N_1 y los CD y M_2N_2 determinan índices respecto del elemento U, eligiendo convenientemente los elementos M' y N' existen índices de los pares M_1N_1 y $M'N'$ y de los M_2N_2 y $M'N'$.

Si los pares PQ *y* MN *tienen índices respecto de* U *y los* MN *y* M′N′ *son equivalentes respecto de este mismo elemento, los pares* PQ *y* M′N′ *tienen el mismo índice. Si los pares* PQ *y* MN *y los* PQ *y* M′N′ *tienen el mismo índice, diferente de cero, los* MN *y* M′N′ *son equivalentes.*

Dados tres elementos distintos P, Q *y* U, *se puede determinar un par* MN, *de tal manera que el índice de los pares* PQ *y* MN, *ó el de los* MN *y* PQ, *respecto de* U, *sea igual á un número arbitrario, racional, finito y diferente de cero.*

Si los pares PQ *y* MN *tienen índice respecto de* U *y los* PQ *y* P′Q′ *son equivalentes respecto de este mismo elemento, los pares* P′Q′ *y* MN *tienen el mismo índice. Si los pares* PQ *y* MN *tienen el mismo índice que los* P′Q′ *y* MN, *los* PQ *y* P′Q′ *son equivalentes.*

Si los pares PQ *y* MN *tienen índice respecto de* U, *se verifica que*

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\NM\end{pmatrix}=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}QP\\MN\end{pmatrix}=-\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}.$$

De esta relación se deducen las ecuaciones

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR\\MN\end{pmatrix}+\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}RQ\\MN\end{pmatrix},$$

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\MN\end{pmatrix}=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PR_1\\MN\end{pmatrix}+\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}R_1R_2\\MN\end{pmatrix}+\ldots\ldots+\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}R_{n-1}Q\\MN\end{pmatrix},$$

las cuales suponen la existencia de los índices que figuran en los segundos miembros.

Si los pares RS *y* PQ, *así como los* PQ *y* AB, *tienen índice, es*

$$\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}RS\\PQ\end{pmatrix}.\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}PQ\\AB\end{pmatrix}=\overset{U}{\text{ind}}\begin{pmatrix}RS\\AB\end{pmatrix}.$$

Si los elementos P *y* Q *son diferentes y los pares* RS *y* AB, *y* PQ *y* AB *tienen índices respecto de* U, *la razón*

$$\overset{U}{\text{ind}}\binom{RS}{AB} : \overset{U'}{\text{ind}}\binom{PQ}{AB}$$

es independiente de AB *é igual al índice de los pares* RS *y* PQ *respecto de* U.

161. Si los pares BP y BC tienen índice respecto de A, lo llamaremos también índice del elemento P en la red ABC y lo representaremos por la notación

$$\overset{A}{\text{ind}}\binom{BP}{BC} = \overset{ABC}{\text{ind}}\ P.$$

Fijando los elementos A, B y C, este índice pasa por todos los valores reales finitos (*), pero una sola vez por cada uno.

Si $ABCP$ y $A'B'C'P'$ son figuras proyectivas contenidas en la misma ó en diferentes figuras de primera categoría, los índices de los elementos P y P' en las redes ABC y $A'B'C'$, respectivamente, son iguales. Por consiguiente, si A, B, C y P son elementos distintos, como las figuras $ABCP$, $PCBA$, $CPAB$ y $BAPC$ son proyectivas (**109**), será

$$\overset{ABC}{\text{ind}}\ P = \overset{PCB}{\text{ind}}\ B = \overset{CPA}{\text{ind}}\ B = \overset{BAP}{\text{ind}}\ C.$$

El caso en que la figura $ABCP$ es armónica es el único en que pueden permutarse todavía de otro modo los cuatro elementos sin que varíe el índice; *la posición armónica viene expresada ahora por la ecuación*

$$\overset{ABC}{\text{ind}}\ P = -1.$$

De la fórmula

$$\overset{A}{\text{ind}}\binom{RP}{BC} = \overset{A}{\text{ind}}\binom{RB}{BC} + \overset{A}{\text{ind}}\binom{BP}{BC} = \overset{A}{\text{ind}}\binom{BP}{BC} - \overset{A}{\text{ind}}\binom{BR}{BC},$$

(*) Con la restricción indicada en el § **23**.

que supone la existencia de índices de los elementos P y R en la red ABC, se deduce

$$\overset{ABC}{\text{ind}}\ P - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R = \overset{A}{\text{ind}} \begin{pmatrix} RP \\ BC \end{pmatrix}.$$

Si se hace extensiva esta hipótesis á un elemento Q, se tiene

$$\overset{ABC}{\text{ind}}\ Q - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R = \overset{A}{\text{ind}} \begin{pmatrix} RQ \\ BC \end{pmatrix},$$

de donde, si P, Q y R son diferentes entre sí,

$$\frac{\overset{ABC}{\text{ind}}\ P - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R}{\overset{ABC}{\text{ind}}\ Q - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R} = \overset{A}{\text{ind}} \begin{pmatrix} RP \\ RQ \end{pmatrix} = \overset{ARQ}{\text{ind}}\ P$$

$$= \overset{PQR}{\text{ind}}\ A = \overset{P}{\text{ind}} \begin{pmatrix} QA \\ QR \end{pmatrix}.$$

Por último, haciendo intervenir un elemento S, diferente del P, que tenga índice en la red ABC, se tiene también

$$\frac{\overset{ABC}{\text{ind}}\ Q - \overset{ABC}{\text{ind}}\ S}{\overset{ABC}{\text{ind}}\ P - \overset{ABC}{\text{ind}}\ S} = \overset{A}{\text{ind}} \begin{pmatrix} SQ \\ SP \end{pmatrix} = \overset{ASP}{\text{ind}}\ Q$$

$$= \overset{PQA}{\text{ind}}\ S = \overset{P}{\text{ind}} \begin{pmatrix} QS \\ QA \end{pmatrix},$$

y como el producto

$$\overset{P}{\text{ind}} \begin{pmatrix} QS \\ QA \end{pmatrix} . \overset{P}{\text{ind}} \begin{pmatrix} QA \\ QR \end{pmatrix} = \overset{P}{\text{ind}} \begin{pmatrix} QS \\ QR \end{pmatrix}$$

vemos que es índice de S en la red PQS, llegamos á la importante fórmula

$$\overset{PQR}{\text{ind}}\ S = \frac{\overset{ABC}{\text{ind}}\ P - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R}{\overset{ABC}{\text{ind}}\ Q - \overset{ABC}{\text{ind}}\ R} + \frac{\overset{ABC}{\text{ind}}\ Q - \overset{ABC}{\text{ind}}\ S}{\overset{ABC}{\text{ind}}\ P - \overset{ABC}{\text{ind}}\ S}.$$

También podemos escribir

$$\overset{PQR}{\text{ind}}\ S = \overset{A}{\text{ind}}\left(\frac{RP}{RQ}\right) . \overset{A}{\text{ind}}\left(\frac{SQ}{SP}\right) = \frac{\overset{A}{\text{ind}}\left(\frac{PR}{RQ}\right)}{\overset{A}{\text{ind}}\left(\frac{PS}{SQ}\right)}.$$

162. En la Geometría euclidiana, suponiendo que P, Q, R y S son puntos propios de una recta y A es el punto absoluto de ésta, y de acuerdo con lo dicho en el número **153**, se llama al numerador de la fracción anterior, esto es, á la razón de los segmentos PR y RQ, razón en que el punto R divide al segmento PQ (*) ó razón simple de los tres puntos P, Q y R; el denominador es la razón simple de los puntos P, Q y S. El número que hemos introducido como índice de S en la red PQR aparece aquí como razón de dos razones, á cuya circunstancia debe el nombre de razón doble que suele dársele.

Si D es un elemento cualquiera que tiene índice en la red arbitraria ABC, á su índice se le llama razón doble de los cuatro elementos $ABCD$ (**), ó de los dos pares AB y CD, y se le designa abreviadamente por $(ABCD)$; esto es,

$$\overset{ABC}{\text{ind}}\ D = (ABCD).$$

163. Consideremos por ahora solamente razones dobles cuyos cuatro elementos sean diferentes entre sí, las cuales pueden tomar, por consiguiente, todos los valores racionales, excepto 0,1 é ∞. En tal supuesto, si en la figura formada por los cuatro elementos se permutan dos de ellos y también los otros dos, se obtiene una figura proyectiva con la primera; luego $(ABCD) = (CDAB) = (BACD)$; es decir, *la razón doble de dos pares permanece invariable si se invierten éstos ó se permutan en cada uno sus dos elementos, y también, por consiguiente, cuando se efectúan ambas operaciones.* Por el contra-

(*) El autor la llama razón de división (Theilungsverhältnis), denominación que substituímos por las usuales en castellano.—*(N. T.)*

(**) Es también de uso muy frecuente el nombre de razón anarmónica, debido á Chasles.—*(N. T.)*

rio, cualquiera otra alteración de los elementos origina, en general, una variación de la razón doble.

Si se permutan los elementos de un par, la razón doble se convierte en su recíproca. Pues, si los pares BD y BC tienen un índice respecto de A, su valor recíproco es el índice de los pares BC y BD.

Si en una razón doble se permutan los elementos primero y cuarto, ó segundo y tercero, la nueva razón doble se obtiene restando la primera de la unidad. Pues se tiene

$$1 - \overset{A}{\operatorname{ind}} \binom{BD}{BC} = \overset{A}{\operatorname{ind}} \binom{CB}{CB} + \overset{A}{\operatorname{ind}} \binom{BD}{CB} = \overset{A}{\operatorname{ind}} \binom{CD}{CB} =$$
$$= (ACBD) = (DBCA).$$

Por consiguiente, si cuatro elementos en un cierto orden determinan una razón doble, por ejemplo $(ABCD) = x$, á cada otro orden en que se supongan corresponde una razón doble y sus valores son:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = x,$$

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = \frac{1}{x},$$

$$(ACBD) = (CADB) = (BDAC) = (DBCA) = 1 - x,$$

$$(ADBC) = (BCAD) = (DACB) = (CBDA) = 1 - \frac{1}{x},$$

$$(ACDB) = (CABD) = (DBAC) = (BDCA) = \frac{1}{1 - x},$$

$$(ADCB) = (DABC) = (CBAD) = (BCDA) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Estos seis números son distintos entre sí, excepto cuando x tiene uno de los valores $-1, 2, \frac{1}{2}$ (*); en estos casos, ocho de

(*) Conviene no olvidar que se trata de elementos reales exclusivamente, pues si una de las razones tuviese por valor una raiz cúbica imaginaria de -1, doce tendrían este mismo valor y las 12 restantes el conjugado. La figura se llama entonces *equianarmónica* (Cremona).—*(N. T.)*

las permutaciones corresponden á figuras armónicas y tienen la razón doble -1, mientras que la razón doble de otras ocho tiene el valor 2 y la de las ocho restantes el valor $\frac{1}{2}$.

Observemos aún que si existen las razones dobles (ABP_1P_2) y (ABP_1P_3), también los elementos A, B, P_2 y P_3 determinan una razón doble, y se verifica la relación

$$(ABP_2P_3) \,.\, (ABP_3P_1) \,.\, (ABP_1P_2) = 1,$$

y si existen las razones dobles

$$(ABCP_1) = x_1,\ (ABCP_2) = x_2,\ (ABCP_3) = x_3,\ (ABCP_4) = x_4$$

también P_1, P_2, P_3 y P_4 determinan una razón doble

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)}.$$

164. El signo de la razón doble $(ABCD)$ permite reconocer si los pares AB y CD están separados ó no. Si la razón doble $(ABCD)$ es positiva, los elementos A y B no están separados por los C y D; si es negativa, los pares AB y CD están separados. Sean, en efecto, m y n números enteros positivos, y dados A, B y C construyamos los elementos E, D y D' tales que sean

$$(ABCE) = \frac{1}{n},\quad (ABCD) = \frac{m}{n},\quad (ABCD') = -\frac{m}{n};$$

entonces, por ser

$$(ABEC) = n,\quad (ABED) = (ABEC) \,.\, (A|BCD) = m,$$

C es el n^{esimo} elemento de la red ABE y D el m^{esimo}; por consiguiente (**97**), A y E están separados por B y C y también por B y D; luego, no lo están A y B por C y E, ni por D y E, ni, en consecuencia, por C y D. Finalmente, puesto que

$$(ABDD') = (ABDC) \,.\, (ABCD') = -1,$$

A y B están separados por D y D', pero no lo están por D y C; luego lo están por C y D'.

165. Con tres elementos distintos A, B y C podemos formar las razones dobles $(ABCB) = 0$ y $(ABCC) = 1$. Convie-

ne, sin embargo, prescindir de razones dobles en las que dos elementos son idénticos. Para que subsistan los teoremas que acabamos de deducir (si bien con algunas modificaciones) hay que admitir los valores

$$(ACBC) = (CACB) = 0, \quad (ABCC) = (CCAB) = 1,$$
$$(CABC) = (ACCB) = \infty$$

y el correspondiente

$$\overset{ABC}{\text{ind}\ A} = (ABCA) = \infty \ ;$$

las doce permutaciones de los elementos A, B, C y C dan para razones dobles los valores 0, 1 ó ∞, cada uno de los cuales aparece cuatro veces.

166. A todo número racional λ, incluyendo entre ellos el valor ∞, corresponde, después de lo dicho, un elemento P, y sólo uno, que forma con los A, B y C una razón doble $(ABCP) = \lambda$, al cual llamaremos siempre elemento de la red ABC. Cada cuatro elementos P_1, P_2, P_3 y P_4 de la red ABC, diferentes entre sí y del A, determinan una razón doble que se calcula por medio de sus índices, aplicando la fórmula del núm. **161**. Pero también cuando un elemento tiende al A, se obtiene una razón doble, pues, según una fórmula dada en el mismo núm. **161**, es

$$(P_1 P_2 P_3 A) = \frac{(ABCP_1) - (ABCP_3)}{(ABCP_2) - (ABCP_3)}.$$

Por consiguiente, *si se designan por* P_1, P_2 *y* P_3 *tres elementos cualesquiera de la red* ABC, *todo elemento de ésta pertenece á la* $P_1P_2P_3$, y recíprocamente.

167. *Si los elementos* E *y* F *son diferentes del* A, *en la red* ABC *existen elementos separados del* A *por los* E *y* F.

DEMOSTRACIÓN: Si E y F son elementos de la red ABC, basta hallar un elemento V que tenga índice negativo en la red EFA; este elemento pertenecerá también á la red ABC y estará separado del A por los E y F. Si E es un elemento de la red ABC, pero no lo es F, uno, al menos, de los elementos B y C (por ejemplo, el B), es distinto del E; enton-

ces, si E y F están separados por A y B, la proposición es evidente; si lo están F y B por A y F, basta determinar (**97**) un elemento U de la red EAB (y, por tanto, también de la ABC), tal que A y U estén separados por E y F; por último, si lo están A y E por B y F (y, por consiguiente, no lo están B y E por A y F), se determina un elemento T de la red ABE, tal que B y T estén separados por A y F (y, en consecuencia, E y T por A y F) y, en seguida, un elemento U de la red EAT que esté separado del A por los E y F. Queda todavía por considerar el caso en que ni E ni F pertenezcan á la red ABC. En tal supuesto, se construye el par BF', equivalente al EF, respecto del elemento A; se hallan después en la red ABC un elemento B' separado del A por los B y F' y en la ABB' (**152**) dos elementos C' y U, tales que los pares $C'U$ y AE estén separados y los pares BB' y $C'U$ sean equivalentes respecto de A; finalmente, se determina el par $C''G$ equivalente al BF' respecto de A. Entonces BC', $B'U$ y $F'G$ son pares de elementos homólogos de una equivalencia con el elemento límite A; por consiguiente, la figura $ABB'F'$ es proyectiva con la $AC'UG$ y el par $C'G$ está separado por el AU, es decir, que, respecto de A, están U entre C' y G y E entre C' y U, luego E entre C' y G y U entre E y G; por otra parte (**100**), las figuras $AEFC'G$ y $AGC'FE$ son proyectivas y, según hemos dicho, E está entre G y C' respecto de A, luego G y, por consiguiente, también U, está entre E y F. El elemento U pertenece, pues, á la red ABC y está separado del A por los E y F.

168. *Dados arbitrariamente tres elementos* E, F *y* H, *en la red* ABC *existen elementos separados del* H *por los* E *y* F.

Pues, designando por A' un elemento no separado del H por los E y F, por B' y C' dos elementos diferentes del A', pertenecientes á la red ABC, y por U un elemento de la red $A'B'C'$ separado del A' por los E y F, los pares EF y UH están separados y el elemento U pertenece á la red ABC.

Si E *y* F *son puntos propios y* A, B *y* C *puntos cualesquiera de la recta* EF, *en la red* ABC *existen puntos propios situados entre los* E *y* F.

169. *Si* E, F *y* U *son elementos de la red* ABC, *el índice de* U *está comprendido entre los de* E *y* F, *si* E *y* F *están separados por* A *y* U; y recíprocamente.

Pues, si los pares EF y UA están separados, la razón doble

$$(EFUA) = \frac{(ABCE) - (ABCU)}{(ABCF) - (ABCU)}$$

es negativa, luego numerador y denominador tienen signos opuestos, etc.

Si A, B *y* C *son puntos de una recta propia y* E, F *y* U *puntos propios de la red* ABC, *estando* U *situado entre* E *y* F, *el índice* U *está comprendido entre los de* E *y* F, *si* A *no pertenece al segmento* EF; y recíprocamente.

170. La razón doble de los cuatro puntos en que una recta r es cortada por cuatro planos A, B, C y D se designa por $r\,(ABCD)$. La de las cuatro rectas de un plano que desde un punto P proyectan los A, B, C y D se designa por $P\,(ABCD)$, etc.

§ 22.—Coordenadas (*)

171. Si se designan por A, B y E tres elementos fijos de una figura de primera categoría, por P un elemento cualquiera de la red ABE y por x el índice de P en la red, el número $x = (ABEP)$ pasa por todos los valores racionales (**), incluso el valor ∞, y determina completamente el elemento P de la red, lo mismo que, recíprocamente, el elemento P determina el número x. Adoptando la denominación usada en Geometría analítica, podemos, pues, decir que el número x es la coordenada del elemento P. Puesto que

$$(ABEA) = \infty, \ (ABEB) = 0 \text{ y } (ABEE) = 1,$$

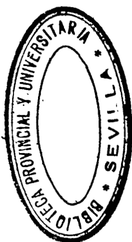
los elementos A, B y E tienen por coordenadas respectivas ∞, 0 y 1, y se dice que son: A el elemento infinito ó primer elemento fundamental; B el elemento cero ó segundo elemento fundamental; E el elemento unidad, y x la coordenada de P en el sistema de coordenadas defi-

(*) Para todo lo relativo á este artículo, véanse: Möbius, *Der Barycentrische Calcul,* 1827, 2.ª parte, cap. VI; Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2.° cuaderno, 1857, § **29**; Lüroth, *Mathem. Ann.*, 1857, tomo VIII, páginas 207 y siguientes; Fiedler, *Darstellende Geometrie*, 2.ª edición, 1875, páginas 523 y siguientes y 739 y siguientes; Sturm, *Mathem. Ann.*, 1876, tomo IX, páginas 343 y siguientes. El contenido de este y del anterior artículo proceden, en su esencia, de una lección dada en el semestre del invierno de 1873-74.—*(N. A.)*

(**) Con la restricción indicada en el § **23**.

nido por A y B como primero y segundo elemento fundamentales, respectivamente, y por E como elemento unidad, ó, más brevemente, la coordenada de P en la red ABE.

Todo número puede escribirse como cociente $\frac{x_1}{x_2}$ de dos números finitos x_1 y x_2, los cuales, independientemente uno de otro, admiten todos los valores finitos con la sola excepción del valor cero, que no se puede asignar á los dos al mismo tiempo. Cada par de valores (x_1, x_2) de esta naturaleza puede tomarse como representante de un número determinado, del cociente $\frac{x_1}{x_2}$; pero, por el contrario, este número no tiene un solo representante, sino infinitos, todos los pares de valores de la forma $(\rho x_1, \rho x_2)$, donde ρ denota un número finito, arbitrario y diferente de cero. Los pares de valores tales que el cociente de sus términos es racional, representan las coordenadas de todos los elementos de una red y pueden, por consiguiente, ser considerados como representantes de los mismos elementos. Si (x_1, x_2) es el par representante del elemento P de coordenada x en la red ABE, los números x_1 y x_2 se llaman coordenadas homogéneas correspondientes á la coordenada $x = \frac{x_1}{x_2}$ (ordinaria), ó coordenadas homogéneas del elemento P en la red ABE, al cual se designa por la notación (x_1, x_2). Para valores finitos de x se pueden tomar $x_1 = x$ y $x_2 = 1$, y si x es infinito, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. Los elementos fundamentales se representan por (1, 0) y (0, 1) y el elemento unidad por (1,1).



172. La ventaja del uso de los coordenadas homogéneas se manifiesta ya en la solución del siguiente problema: Hallar la razón doble de cuatro elementos P, Q, R y S, representados por (x_1, x_2), $(y_1\ y_2)$, (z_1, z_2) y (t_1, t_2) en la red ABE.

Si suponemos primero que P, Q, R y S son diferentes unos de otros y de A, será

$$(PQRS) = \frac{\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{t_1}{t_2}\right)}{\left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{z_1}{z_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{t_1}{t_2}\right)} = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 t_2 - y_2 t_1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(x_1 t_2 - x_2 t_1)}$$

$$= (SRQP) = (RSPQ) = (QPSR)$$

y

$$(PQRA) = \frac{\dfrac{x_1}{x_2} - \dfrac{z_1}{z_2}}{\dfrac{y_1}{y_2} - \dfrac{z_1}{z_2}} = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 \,.\, 0 - y_2 \,.\, 1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_2)(x_1 \,.\, 0 - x_2 \,.\, 1)} \,.$$

Según esto, la fórmula

$$(PQRS) = \frac{(x_1 z_2 - x_2 z_1)(y_1 t_2 - y_2 t_1)}{(y_1 z_2 - y_2 z_1)(x_1 t_2 - x_2 t_1)}$$

continúa siendo aplicable cuando uno de los elementos es el A y, finalmente, también cuando dos elementos son idénticos.

Esta fórmula hace ver, además, que la razón $PQRS$ puede ser substituída por una de las $SRQP$, $RSPQ$ ó $QPSR$, y no cambia cuando se ponen ρx_1 y ρx_2 en lugar de x_1 y x_2, ó ρy_1 y ρy_2 en lugar de y_1 é y_2, etc., como era de prever.

173. Pasando ahora á las figuras de segunda categoría, tomemos primero en un plano cuatro puntos A, B, C y E (*figura 72*), que de tres en tres no están en línea recta, y proyectemos el punto E desde los A, B y C sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente, en E_1, E_2 y E_3. Si P_1 es un punto de la red BCE_1, P_2 un punto de la red CAE_2, P el punto de intersección de las rectas AP_1 y BP_2 y, por último, P_3 la proyección de P desde C sobre AB, los haces $B(CAEP)$ y $P(E_1AEB)$ son perspectivos; por consiguiente

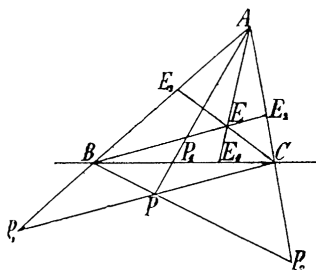


Fig. 72.

$$(CAE_2P_2) = B(CAEP) = P(E_1AEB),$$

$$(BCE_1P) = P(BCE_1A) = P(E_1ABC);$$

existe, pues, también una razón doble

$$P(E_1ACE) = C(BAPE) = (BAP_3E_3) = (ABE_3P_3),$$

es decir, P_3 es un punto de la red ABE_3. Todo punto P del plano ABC, que se proyecta desde los A, B y C sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente, en puntos de las redes BCE_1, CAE_2 y ABE_3, se dice que es un punto de la red $ABCE$. Si se designan por v_1 y v_2 las coordenadas de P_1 en la red BCE_1, por w_1 y w_2 las de P_2 en la red CAE_2 y por x_1 y x_2 las de P_3 en la red ABE_3, será

$$\frac{v_1}{v_2}\,\frac{w_1}{w_2}\,\frac{x_1}{x_2} = (BCE_1P_1)(CAE_2P_2)(ABE_3P_3) =$$

$$= P(E_1AEB) \,.\, P(E_1ABC) \,.\, P(E_1ACE) = 1.$$

Representando, además, por x_3 el valor común de los cocientes

$$\frac{x_2\,v_2}{v_1} = \frac{x_1\,w_1}{w_2},$$

resulta

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{v_1}{v_2},\ \frac{x_3}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Existen, pues, tres números x_1, x_2 y x_3 tales que

$$\frac{x_2}{x_3} = (BCE_1P_1) = A(BCEP),\ \frac{x_3}{x_1} = (CAE_2P_2) = B(CAEP),$$

$$\frac{x_1}{x_2} = (ABE_3P_3) = C(ABEP),$$

y esta propiedad subsiste cuando el punto P está en uno de los lados del triángulo ABC, pero sin que sea uno de sus vértices. Si, por ejemplo, P está en AB, pero sin ser A ni B, los puntos P_1, P_2 y P_3 caen, respectivamente, en A, B y P y se tiene $x_3=0$, mientras que x_1 y x_2 no son nulos. Pero, si P es un vértice de aquel triángulo, uno de los puntos P_1, P_2 ó P_3 queda indeterminado; por ejemplo, si P se confunde con A, P_1 es indeterminado, P_2 y P_3 coinciden con A y se toman $x_2=0$, $x_3=0$ y para x_1 un número finito, arbitrario y diferente de 0.

Puesto que uno, á lo más, de los cocientes $\frac{x_2}{x_3}$, $\frac{x_3}{x_1}$ y $\frac{x_1}{x_2}$

puede quedar indeterminado, los números x_1, x_2 y x_3 determinan la posición de dos, por lo menos, de las rectas AP_1 BP_2 y CP_3 y, por consiguiente, en todos los casos, el punto P como intersección de ambas. Por el contrario, el punto P no determina completamente los tres números x_1, x_2 y x_3, sino que con igual razón que el sistema de valores (x_1, x_2, x_3) pueden tomarse siempre para representantes de dicho punto todos los sistemas $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$, donde ρ denota un número finito, arbitrario y diferente de cero. Si, pues, llamamos á x_1, x_2 y x_3 coordenadas del punto P en la red $ABCE$, estas coordenadas deben designarse como homogéneas. Aparte la condición de no poder anularse las tres á un tiempo, las coordenadas deben cumplir la de que sus cocientes sean números racionales; por lo demás, pueden ser tomadas completamente arbitrarias.

Para todos los puntos de las redes BCE_1, CAE_2 y ABE_3, pero sólo para éstos, es, respectivamente, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. Los puntos A, B y C tienen, según el orden en que se han supuesto, los representantes (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) y se llaman primero, segundo y tercer punto fundamental. El punto E tiene las coordenadas (1, 1, 1) y se llama punto unidad. Los tres puntos fundamentales (fijado su orden de sucesión) determinan con el punto unidad el sistema de coordenadas.

174. Si tomamos ahora en un plano cuatro rectas fijas a, b, c y e, que de tres en tres no pasen por un punto, y llamamos recta de la red $abce$ á toda recta r tal que existan dos de las razones dobles $a(bcer)$, $b(caer)$ y $c(aber)$, se pueden introducir coordenadas homogéneas u_1, u_2, u_3 para todas las rectas de la red, de tal manera que, en general, sean

$$\frac{u_2}{u_3} = a(bcer),\ \frac{u_3}{u_1} = b(caer),\ \frac{u_1}{u_2} = c(aber).$$

Si existen dos de estas razones dobles, también existe la tercera, excepción hecha del caso en que la recta r sea uno de los a, b ó c. Para coordenadas de la recta a se toman (1, 0, 0) ó $(\rho, 0, 0)$; para b (0, 1, 0) ó $(0, \rho, 0)$; para c (0, 0, 1) ó $(0, 0, \rho)$, y la e viene representada por (1, 1, 1) ó (ρ, ρ, ρ). Las rectas a, b, c y e, consideradas las tres primeras como rectas fun-

damentales y la cuarta como recta unidad, determinan el sistema de coordenadas.

175. Se acostumbra introducir al mismo tiempo en el plano coordenadas de puntos y de rectas, fijando en él un triángulo y un par de elementos que, respecto de éste, sean polo y polar (**69**). Sean A, B y C los vértices del triángulo, a, b y c sus lados opuestos y e la polar del punto E respecto del triángulo ABC, y supongamos tomados estos elementos de modo que los puntos A, B, C y E no estén de tres en tres en línea recta, ni, por consiguiente, las rectas a, b, c y e pasen de tres en tres por un punto. (Las figuras $ABCEabce$ y $abceABCE$ son polares recíprocas). Si tomamos un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ en la red $ABCE$ y una recta r (u_1, u_2, u_3) en la red $abce$, la recta r es cortada por las a, b, c, AP, BP y CP, respectivamente, en R_1, R_2, R_3, P_1, P_2 y P_3, de manera que

$$(R_2R_3R_1P_1) = -\frac{x_3u_3}{x_2u_2},\ (R_3R_1R_2P_2) = -\frac{x_1u_1}{x_3u_3},$$

$$(R_1R_2R_3P_3) = -\frac{x_2u_2}{x_1u_1},$$

ó, también,

$$(R_1R_2R_3P_1) = \frac{x_2u_2}{x_2u_2 + x_3u_3},\ (R_1R_2R_3P_2) = \frac{x_1u_1 + x_3u_3}{x_1u_1},$$

$$(R_1R_2R_3P_3) = -\frac{x_2u_2}{x_1u_1},$$

pues, si por un momento se designa por E' el punto ae, será

$$A(BCEP) = \frac{x_2}{x_3},\ a(bcer) = (CBE'R_1) = \frac{u_2}{u_3},\ A(CBEE') = -1,$$

$$-\frac{x_2u_2}{x_3u_3} = A(CBPE)\,.\,A(CBEE')\,.\,A\,(CBE'R_1)$$

$$= A(CBPR_1) = (R_2R_3P_1R_1),$$

y así para las demás.

Si el punto P está en la recta r, se confunde con los P_1, P_2 y P_3; las razones dobles $(R_1R_2R_3P_1)$, $(R_1R_2R_3P_2)$ y $(R_1R_2R_3P_3)$ son idénticas y la suma $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ es

nula, y recíprocamente. Se reconoce fácilmente que esta propiedad subsiste cuando una ó varias de las coordenadas se anulan.

Si ahora designamos por $Q(y_1, y_2, y_3)$ y $R(z_1, z_2, z_3)$ dos puntos de la red $ABCE$, y hacemos

$$v_1 = y_2 z_1 - y_3 z_2, \quad v_2 = y_3 z_1 - y_1 z_3, \quad v_3 = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

los números v_1, v_2 y v_3 se comportan como enteros, sin que puedan anularse simultáneamente, y, puesto que se verifica

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0 \quad \text{y} \quad z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 v_3 = 0,$$

representan una recta, que pertenece á la red $abce$ y contiene los puntos Q y R, es decir, que: *Si se unen dos puntos de la red* ABCE, *se obtiene una recta de la red* abce, *y si se halla el punto de intersección de dos rectas de la red* abce, *se obtiene un punto de la red* ABCE. Si, pues, debido á esto, llamamos á aquellas rectas también «rectas de la red $ABCE$» á sus coordenadas también «coordenadas en la red $ABCE$», á estos puntos también «puntos de la red $abce$» etcétera, *todos los puntos y rectas que se obtengan de los puntos* A, B, C *y* E *ó de las rectas* a, b, c *y* e, *cuando en el plano* ABC *se construyan únicamente rectas de unión de puntos y puntos de intersección de rectas, se llamarán elementos de la red* ABCE *ó de la* abce, *indistintamente.*

La ecuación $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$ expresa la condición necesaria y suficiente para que sean incidentes los elementos (x_1, x_2, x_3) y (u_1, u_2, u_3), uno de los cuales es un punto y el otro una recta, ambos de la red $ABCE$.

176. Designemos el elemento (x_1, x_2, x_3) por X, el elemento (p_1, p_2, p_3) por P, etc. Por el punto X de la red $ABCE$ se pueden trazar cuatro rectas pertenecientes á la red, uniéndolo con cuatro puntos P, Q, R y S de ésta. El rayo XP tiene por coordenadas

$$x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad x_3 p_1 - x_1 p_3 \quad \text{y} \quad x_1 p_2 - x_2 p_1,$$

luego, será

$$a\,(b, c, e, XP) = \frac{x_3 p_1 - x_1 p_3}{x_1 p_2 - x_2 p_1}$$

y, del mismo modo,

$$a(b,\ c,\ e,\ XQ) = \frac{x_3 q_1 - x_1 q_3}{x_1 q_2 - x_2 q_1},\ \text{etc.}$$

Pero, de aquí resulta también para los rayos XP, XQ, XR y XS una razón doble

$$\frac{(x_3 p_1 - x_1 p_3)(x_1 r_2 - x_2 r_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1)(x_3 r_1 - x_1 r_3)}{(x_3 q_1 - x_1 q_3)(x_1 r_2 - x_2 r_1) - (x_1 q_2 - x_2 q_1)(x_3 r_1 - x_1 r_3)} \times$$

$$\frac{(x_3 q_1 - x_1 q_3)(x_1 s_2 - x_2 s_1) - (x_1 q_2 - x_2 q_1)(x_3 s_1 - x_1 s_3)}{(x_3 p_1 - x_1 p_3)(x_1 s_2 - x_2 s_1) - (x_1 p_2 - x_2 p_1)(x_3 s_1 - x_1 s_3)},$$

y representando la determinante $\Sigma \pm x_1 p_2 r_3$, por ejemplo, por (xpr), será

$$X(PQRS) = \frac{(xpr)\,(xqs)}{(xqr)\,(xps)}.$$

Si fuese $x_1 = 0$, se substituiría abc por bca ó por cab.

Sobre la recta u de la red $ABCE$ se pueden determinar cuatro puntos de la red por intersección con cuatro rectas f, g, h y k que pertenezcan á ella. La razón doble de estos cuatro puntos resulta ser

$$u(fghk) = \frac{(ufh)\,(ugk)}{(ugh)\,(ufk)}.$$

Por consiguiente, si X, P, Q, R y S son elementos de igual naturaleza de la red $ABCE$, y los P, Q, R y S son tales que de tres en tres no pertenecen á una misma figura de primera categoría, existen dos, al menos, de las razones dobles

$$P(QRSX),\ Q(RPSX)\ \text{y}\ R(PQSX),$$

es decir, X es un elemento de la red $PQRS$ y, en general, todos los puntos y rectas de la red $ABCE$ pertenecen á la $PQRS$, en la cual están contenidos, en particular, los mismos A, B, C, E, a, b, c y e. *Si se designan por* P, Q, R *y* S *cuatro puntos de la red* ABCE *que de tres en tres no estén en línea recta, ó cuatro rectas de la red* ABCE *que de tres en tres no pasen por un punto, todos los elementos de la red* ABCE *pertenecen también á la* PQRS, *y recíprocamente.*

177. Consideraciones análogas á las planimétricas prece-

dentes pueden hacerse en las figuras radiadas. Si designamos por a, b y c tres rectas de una radiación, por A, B y C los planos que determinan de dos en dos, por e otra recta de la radiación, exterior á estos planos, y por E el plano polar de la recta e (**70**) respecto del triedro abc, todas las rectas y todos los planos de la radiación abc que se deducen de las rectas a, b, c y e, ó de los planos A, B, C y E, construyendo únicamente planos determinados por rectas y rectas de intersección de planos, se llaman elementos de la red $abce$ ó de la $ABCE$. Si p, q, r y s son cuatro rectas ó cuatro planos de la red $abce$ que de tres en tres no pertenecen á un haz, todos los elementos de la red $abce$ pertenecen á la $pqrs$, y recíprocamente. Cada uno de estos elementos tiene tres coordenadas homogéneas en la red $abce$ ó en la $ABCE$; a, b y c se llaman rectas fundamentales, e recta unidad, A, B y C planos fundamentales y E plano unidad. Representando por x_1, x_2 y x_3 las coordenadas de la recta x en la red $abce$ y por u_1, u_2 y u_3 las del plano U en la misma red, se tiene

$$\frac{x_2}{x_3} = a(bcex), \text{ etc.}; \qquad \frac{u_2}{u_3} = A(BCEU), \text{ etc.}$$

La condición necesaria y suficiente para que la recta x y el plano U sean incidentes, viene expresada por la ecuación

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$$

Si x, p, q, r y s son rectas ó planos de la radiación, se tiene

$$x(pqrs) = \frac{(xpr)(xqs)}{(xqr)(xps)}.$$

178. Dejando ahora las figuras de segunda categoría, tomemos cinco puntos A, B, C, D y E que de cuatro en cuatro no estén en un plano y proyectemos el E desde los A, B, C y D sobre los planos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente, en E_1, E_2, E_3, y E_4. Sean E_{12} el punto de intersección del plano ABE con la recta CD; E_{13} el del plano ACE con la recta BD, etc. Si designamos por P_{12}, P_{23} y P_{34} puntos de las redes CDE_{12}, ADE_{23} y ABE_{31}, respectivamente, por P el punto común á los tres planos ABP_{12}, BCP_{23} y CDP_{34}, y por P_{24}, P_{23}

ninguno de estos. Si, por ejemplo, está P en AB, pero sin ser A ni B, los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 coinciden, respectivamente, con los B, A, P y P_1, y se tiene $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$, pero x_1 y x_2 no son nulas. Si P es uno de los puntos A, B, C ó D, una de las proyecciones P_1, P_2, P_3 ó P_4 queda indeterminada; por ejemplo, si P cae en A, P_1 queda indeterminado, P_2, P_3 y P_4 se confunden con A, y serán $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y para x_1 se toma un número finito cualquiera diferente de cero.

Los números x_1, x_2, x_3 y x_4 determinan el punto P como intersección de los planos ABP_{12}, ${}_{13}ACP$, etc., y se llaman coordenadas de P en la red $ABCDE$, pudiendo tomarse en su lugar también ρx_1, ρx_2, ρx_3 y ρx_4, si ρ no es nulo ni infinito. Estas coordenadas se designan, de modo análogo á lo antes hecho, como homogéneas; no pueden anularse simultáneamente y sus cocientes son números racionales, pero no cumplen ninguna otra condición. Para todos los puntos de la red $BCDE_1$ es $x_1 = 0$, para todos los de la CDE_{12} es $x_1 = x_2 = 0$, etcétera. Los puntos A, B, C, D y E tienen, según el orden de colocación en que se han supuesto, los representantes (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) y (1, 1, 1, 1), y se llaman, respectivamente, primero, segundo, tercero y cuarto puntos fundamentales y punto unidad. Los cuatro puntos fundamentales (fijado su orden de sucesión) determinan con el punto unidad el sistema de coordenadas.

179. De modo análogo, según la ley de correlación entre punto y plano, se definen los planos de la red $ABCDE$ y sus coordenadas, partiendo de los planos A, B, C, D y E, que de cuatro en cuatro no pertenecen á una radiación. Los A, B, C y D son los planos fundamentales y el E el plano unidad. Si P es un plano de la red $ABCDE$, se tiene, en general,

$$\frac{u_1}{u_2} = (CDA,\ CDB,\ CDE,\ CDP),$$

$$\frac{u_1}{u_3} = (BDA,\ BDC,\ BDE,\ BDP), \text{ etc.}$$

180. Se suelen introducir al mismo tiempo coordenadas de puntos y de planos tomando cuatro puntos fijos A, B, C y D, los planos A', B', C' y D' que determinan de tres en tres (es

decir, los BCD, CDA, DAB y ABC), un punto E, fuera de estos planos, y el plano E' polar de este punto (**71**) respecto de los A, B, C y D, de tal manera, pues, que las figuras $ABCDEA'B'C'D'E'$ y $A'B'C'D'E'ABCDE$ son polares recíprocas. El punto E_1 en que la recta AE encuentra al plano A' es, entonces, el polo de la recta $A'E'$ respecto de los puntos B, C y D. Sean $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ un punto en la red $ABCDE$ y $P'(u_1, u_2, u_3, u_4)$ un plano en la red $A'B'C'D'E'$ y designemos por p_1, p_2, p_3 y p_4 las rectas en que el plano P' es cortado por los A', B', C' y D', por P_1, P_2, P_3 y P_4 los puntos de intersección del mismo plano con las rectas AP, BP, CP y DP, por u_2, u_3 y u_4 las coordenadas de la recta p_1 en la red $BCDE_1$, por x_2, x_3 y x_4 las coordenadas del punto P_A, proyección del P desde el A sobre el plano A', por P'_{12} el punto p_1p_2, esto es, el $A'B'P'$ (por tanto, el de intersección de la recta CD con el plano P') y, por último, análogamente al P'_{12} los p_2p_3, p_3p_4, etcétera. Los puntos P'_{12}, P_3 y P_4 están en una recta (por estar en los planos P' y CDP), y lo mismo puede decirse de los P'_{23}, P_1 y P_4, etc.

Si las rectas p_1, p_2, p_3 y p_4 son tales que de tres en tres no pasan por un punto (esto es, si el plano P' no contiene ningún punto fundamental, ó si u_1, u_2, u_3 y u_4 son todas diferentes de cero), se puede construir en el plano P' el polo P'_1 de p_1, por ejemplo, respecto de $p_2\,p_3\,p_4$ (ó $P'_{34}P'_{24}P'_{23}$), y se hallan:

$$x_2u_2,\ x_3u_3,\ x_4u_4$$

como coordenadas de P_1 en la red $p_2\,p_3\,p_4\,p_1$ (ó $P'_{34}P'_{24}P'_{23}P'_1$),

$$-x_1u_1 - x_3u_3 - x_4u_4,\ x_3u_3,\ x_4u_4$$

como coordenadas de P_2 en la misma red, etc. Si en el plano A' el punto P_A se proyecta desde B sobre la recta CD en P'', según una observación antes hecha (**175**) y teniendo en cuenta, además, que P'', P_2 y P'_{34} están en línea recta (por estar en los planos P' y ABP) y que pueden permutarse los índices, se obtiene

$$(P'_{13}P'_{14}P'_{12}P'') = -\frac{x_4u_4}{x_3u_3},$$

$$P_2(P'_{13}P'_{14}P'_{12}P'_{34}) = P'_{34}(P'_{13}P'_{14}P'_{12}P_2) = -\frac{x_4u_4}{x_3u_3},$$

$$P_2(P'_{34}P'_{14}P'_{24}P'_{13}) = -\frac{x_1u_1}{x_3u_3},\ P'_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_{12}P_1) = -\frac{x_3u_3}{x_4u_4};$$

$$P_2(P'_{34}P'_{14}P'_{24}P'_{12}) = P_2(P'_{34}P'_{14}P'_{24}P'_{13}) \cdot P_2(P'_{34}P'_{14}P'_{13}P'_{12})$$
$$= -\frac{x_1u_1}{x_3u_3 + x_4u_4},$$

$$P_2(P'_{13}P'_{34}P'_{23}P'_{24}) = -\frac{x_4u_4}{x_1u_1 + x_3u_3},$$

$$P'_{24}(P'_{23}P'_{34}P'_{13}P_2) = \frac{x_4u_4}{x_1u_1 + x_3u_3 + x_4u_4};$$

$$P'_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_1P_1) = P'_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_1P'_{12}) \cdot P'_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_{12}P_1)$$
$$= \frac{x_3u_3}{x_4u_4},$$

$$P'_{24}(P'_{23}P'_{34}P'_1P_1) = \frac{x_4u_4}{x_2u_2},\quad P'_{23}(P'_{34}P'_{24}P'_1P_1) = \frac{x_2u_2}{x_3u_3};$$

$$P_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_1P_2) = P'_{34}(P'_{24}P'_{23}P'_1P_1) = \frac{x_3u_3}{x_4u_4},$$

$$P'_{24}(P'_{23}P'_{34}P'_1P_2) = -\frac{x_4u_4}{x_1u_1 + x_3u_3 + x_4u_4},$$

$$P'_{23}(P'_{34}P'_{24}P'_1P_2) = -\frac{x_1u_1 + x_3u_3 + x_4u_4}{x_3u_3}.$$

Si P está en P', se confunde con P_1, P_2, P_3 y P_4, y la suma $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4$ es nula, y recíprocamente. La restricción impuesta al plano P' de no contener ningún punto fundamental, se salva fácilmente. Por consiguiente, si

$$Q(y_1, y_2, y_3, y_4),\quad R(z_1, z_2, z_3, z_4),\quad S(t_1, t_2, t_3, t_4)$$

son puntos de la red y ponemos

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = v_1,\ \begin{vmatrix} y_3 & y_1 & y_4 \\ z_3 & z_1 & z_4 \\ t_3 & t_1 & t_4 \end{vmatrix} = v_2,\ \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_4 \end{vmatrix} = v_3,\ -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} = v_4,$$

las sumas

$$y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4,\quad z_1v_1 + z_2v_2 + z_3v_3 + z_4v_4,$$
$$t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 + t_4v_4$$

se anulan, y los números v_1, v_2, v_3 y v_4 representan un plano que pertenece á la red $ABCDE$ y contiene los puntos Q, R y S, es decir, que: *Si se unen tres puntos de la red* ABCDE, *se obtiene un plano de la* A′B′C′D′E′; *si se halla el punto de intersección de tres planos de la red* A′B′C′D′E *se obtiene un punto de la red* ABCDE. Según esto, las rectas que unen cada par de puntos de la red $ABCDE$ se confunden con las de intersección de cada par de planos de la red $A'B'C'D'E'$. A estas rectas se les llama «rectas de la red $ABCDE$» ó «rectas de la red $A'B'C'D'E'$»; á los planos de la red $A'B'C'D'E'$ también «planos de la red $ABCDE$»; á sus coordenadas también «coordenadas en la red $ABCDE$»; á los puntos de la red $ABCDE$ también «puntos de la red $A'B'C'D'E'$» y á sus coordenadas también «coordenadas en la red $A'B'C'D'E'$».

Todos los puntos, rectas y planos que se deducen de los puntos A, B, C, D *y* E *ó de los planos* A′, B′, C′, D′ y E′ *por medio de construcciones gráficas, son elementos de la red* ABCDE *(ó de la* A′B′C′D′E′). Y *todos los elementos de la red se deducen por construcciones gráficas de los puntos* A, B, C, D *y* E *ó de los planos* A′B′C′D′ *y* E′.

La ecuación $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ expresa la condición necesaria y suficiente para que sean incidentes los elementos (x_1, x_2, x_3, x_4) y (u_1, u_2, u_3, u_4), uno de los cuales es un punto y el otro un plano, ambos de la red $ABCDE$.

181. Designemos por X el elemento (x_1, x_2, x_3, x_4), por Y el (y_1, y_2, y_3, y_4), etc. Por los puntos X é Y de la red $ABCDE$ se pueden trazar cuatro planos de ésta proyectando desde la recta XY cuatro puntos P, Q, R y S pertenecientes á la red. El plano XYP tiene por coordenadas $\Sigma \pm x_2y_3p_4$, $\Sigma \pm x_3y_1p_4$, etcétera, de manera que

$$C'D'(A', B', E', XYP) = \frac{\Sigma \pm x_2y_3p_4}{\Sigma \pm x_3y_1p_4};$$

igualmente

$$C'D'(A', B', E', XYQ) = \frac{\Sigma \pm x_2y_3q_4}{\Sigma \pm x_3y_1q_4},$$

y así para los otros. Por consiguiente, los planos XYP, XYQ,

XYR y XYS determinan una razón doble

$$\frac{\Sigma \pm x_2y_3p_4 \,.\, \Sigma \pm x_3y_1r_4 - \Sigma \pm x_3y_1p_4 \,.\, \Sigma \pm x_2y_3r_4}{\Sigma \pm x_2y_3q_4 \,.\, \Sigma \pm x_3y_1r_4 - \Sigma \pm x_3y_1q_4 \,.\, \Sigma \pm x_2y_3r_4}$$
$$\times \frac{\Sigma \pm x_2y_3q_4 \,.\, \Sigma \quad x_3y_1s_4 - \Sigma \pm x_3y_1q_4 \,.\, \Sigma \pm x_2y_3s_4}{\Sigma \pm x_2y_3p_4 \,.\, \Sigma \pm x_3y_1s_4 - \Sigma \pm x_3y_1p_4 \,.\, \Sigma \pm x_2y_3s_4}.$$

Si, pues, se representa la determinante $\Sigma \pm x_1y_2p_3r_4$, por ejemplo, por $(xypr)$, será

$$XY(PQRS) = \frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)}.$$

En el caso de ser $x_3y_4 - x_4y_3 = 0$, esto es,

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4},$$

se substituye $A'B'C'D'$ por otra permutación de sus elementos.

Sobre la recta de intersección de dos planos U y V de la red $ABCDE$ determinemos cuatro puntos de ésta, cortando la recta UV por cuatro planos F, G, H y K de la red. La razón doble de estos cuatro puntos será

$$UV(FGHK) = \frac{(uvfh)\,(uvgk)}{(uvgh)\,(uvfk)}.$$

Por consiguiente, si X, Y, P, Q, R y S son elementos de igual naturaleza de la red $ABCDE$, tales que de los P, Q, R, S y X no hay cuatro que pertenezcan á una figura de segunda categoría, existen tres, al menos, de las razones dobles

$$RS(PQXY),\ QS(PRXY),\ QR(PSXY), \text{ etc.},$$

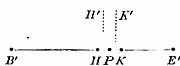
es decir, Y es un elemento de la red $PQRSX$ y, en general, todos los elementos de la red $ABCDE$ pertenecen á la $PQRSX$, en la cual están contenidos, en particular, los mismos A, B, C, D, E, A', B', C', D' y E'. *Si se designan por* P, Q, R, S *y* X *cinco puntos de la red* ABCDE *que de cuatro en cuatro no estén en un plano, ó cinco planos de la red* ABCDE *que de cuatro en cuatro no pasen por un punto, todos los elementos de la red* ABCDE *son también elementos de la* PQRSX, *y recíprocamente.*

———

§ 23.—La serie continua de números en Geometría

182. En el artículo anterior se vió que, fijados cinco puntos A, B, C, D y E que de cuatro en cuatro no estén en un plano, cada elemento de la red $ABCDE$ podía ser representado por medio de números. A toda relación gráfica entre tales elementos correspondía una cierta relación entre los números que servían para la representación de los elementos. Pero no se pudo aún reconocer si este modo analítico de operar puede extenderse á todos los elementos.

Primeramente se introdujeron los números para caracterizar los elementos de una red en una figura de primera categoría; conforme con esto, también ahora consideraremos primero una figura de esta especie. Sean A, B y E puntos cualesquiera de una recta que contiene el punto propio P y tomemos en ella, á diferentes lados de P, los puntos propios F y G. Según lo dicho en el número **168**, se pueden construir en la red ABE un punto propio B' situado entre los F y P, un punto propio E' entre los P y G y, por último, un punto A' no perteneciente al segmento $B'E'$, de tal modo, pues, que B' y E' estarán separados por A' y P, y para reconocer si P pertenece á la red ABE sólo hace falta ver la relación entre dicho punto y la red $A'B'E'$. Ahora, si el punto P tiene un índice en la red $A'B'E'$, este número estará comprendido entre 0 y 1 (**169**);



bastará, por consiguiente, construir los puntos de la red $A'B'E'$ que corresponden á los índices de la serie

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4};\ldots..$$

y mirar si entre ellos se encuentra el punto P.

Pero, según las observaciones hechas ya en los dos primeros artículos (números **12** y **17**; véase también **107**) dicha construcción no puede continuarse indefinidamente, sino que puede señalarse siempre, atendiendo á las circunstancias propias de cada caso, un límite que no se ha de sobrepasar. Para hallar tal límite se parte de la consideración de que:

> En cada caso puede señalarse un segmento MN, dentro del cual no pueden distinguirse puntos separados, y que esto mismo ocurre en todo segmento congruente con aquél ó menor que él.

(Véase la introducción, página 4). Tomemos ahora sobre la recta AB, á ambos lados de P, los segmentos PH y PK, congruentes con el MN, y determinemos dos puntos H' y K' de la red $A'B'E'$ que caigan entre P y H y entre P y K, respectivamente; los índices de H' y K' en la red $A'B'E'$ son quebrados propios positivos, que, reducidos al mínimo denominador común, tendrán la forma $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$. Puesto que P está entre H' y K', sólo podrá ser índice de P (**169**) en la red $A'B'E'$ alguno de los números (fraccionarios propios y positivos) comprendidos entre $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$. Uno, al menos, de tales números se presenta en la serie

$$\frac{1}{v+1},\ \frac{2}{v+1},\ \frac{3}{v+1}\ \ldots..,\ \frac{v}{v+1};$$

el punto correspondiente coincide exactamente con el P ó no difiere sensiblemente de él, porque de no ser así se le podría intercalar entre el H' y el P ó entre el P y el K'. Lo mismo sucede para los denominadores $v+2$, $v+3$ .....; en general, los puntos correspondientes á los números comprendidos en-

tre $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$, dentro de lo que se alcanza en su construcción, no difieren sensiblemente del P.

Según esto, cuando entre los quebrados propios y positivos con denominador menor que $v+1$ no se ha encontrado un número que represente exactamente el punto P, es inútil continuar la investigación con los denominadores superiores á $v+1$ y, por consiguiente, con un número finito de construcciones se llega á un número ξ que representa con suficiente exactitud, como índice en la red $A'B'E'$, al punto P. Finalmente, se calcula un número racional x que, como indice en la red ABC, determina con exactitud suficiente el punto P, por medio de la ecuación

$$\xi = \frac{(ABEA') - (ABEE')}{(ABEB') - (ABEE')} \; \frac{(ABEB') - x}{(ABEA') - x}.$$

183. Tomemos ahora un haz de rectas con vértice propio y fijemos en él tres rayos a, b y e. Designando por r un rayo cualquiera del haz ocurre preguntar si podrá representarse r por medio de un índice en la red abe. Si se traza por un punto propio P (lo más alejado posible del vértice del haz) del rayo r una recta que corte á las a, b y e en los puntos A, B y E, respectivamente, y se determina un número racional x que, como índice en la red ABE, corresponda exactamente ó con suficiente exactitud, al punto P, este número, considerado como índice en la red abe, puede ser definido como representante suficientemente exacto del rayo r. A esta determinación pueden reducirse todos los casos en que se dan en una figura de primera categoría cuatro elementos a', b', e' y p', y se pregunta si p' tiene un índice en la red $a'b'e'$, pues se puede construir en el haz abe el rayo r, de tal manera, que las figuras $aber$ y $a'b'e'p'$ sean proyectivas, y entonces definir el número x, determinado según se ha dicho y tomado como índice en la red $a'b'e'$, como representante suficientemente exacto del elemento p'.

184. Como con esto queda establecida la posibilidad de representar con suficiente exactitud en toda figura de primera categoría la posición de uno cualquiera de sus elementos respecto de tres fijos por medio de una coordenada ordinaria y, por consiguiente,

también por dos coordenadas homogéneas, se llega en seguida á la solución del problema análogo en las figuras de segunda categoría. Si, por ejemplo, A, B, C y E son cuatro puntos de un plano que de tres en tres no están en una recta y P un punto del plano ABC, exterior á las rectas BC, CA y AB, se ve la posición de la recta AP respecto de las AB, AC y AE, la de la recta BP respecto de las BC, BA y BE, etcétera, y si se representan lo más exactamente posible dos de estas rectas por medio de índices en las redes correspondientes, las tres coordenadas homogéneas que, según lo dicho en el número **173**, corresponden á los dos índices, determinan con suficiente exactitud la posición del punto P.

Por último, si A, B, C, D y E son cinco puntos que de cuatro en cuatro no están en un plano y P un punto exterior á los planos BCD, CDA, DAB y ABC, ó un plano exterior á las radiaciones A, B, C y D, de tres determinaciones de índices, se deducen las cuatro coordenadas homogéneas de un elemento que coincide exacta ó aproximadamente con el P, y si se trata de fijar la posición de una recta se utilizan dos puntos ó dos planos incidentes con ella.

Por lo demás, siempre se pueden tomar, en último término, como elementos dados, un número de puntos propios, representados lo más exactamente posible por puntos propios de la red $ABCDE$, debiendo tener en cuenta en esto las relaciones que existan entre los elementos dados. Así, por ejemplo, si cuatro puntos P, Q, R y S deben estar en un plano, pero sin que los P, Q y R estén en línea recta, después de hallar los representantes de los puntos P, Q y R y, por consiguiente, también del plano PQR, para el punto S sólo se determinan directamente dos, mientras que el tercero se calcula por la condición de ser incidentes el plano PQR y el punto S.

185. En obsequio á la sencillez, consideraremos como datos solamente puntos. Si éstos no se confunden exactamente con puntos de la red $ABCDE$ y, por consiguiente, la figura correspondiente á las coordenadas halladas no coincide exactamente con la dada, se podrá, sin embargo, aplicar la investigación analítica á la primera, y sus resultados se confirmarán en la última *sólo aproximadamente*. Pero, en todos los casos son aplicables á la investigación analítica las siguientes definiciones:

1.ª Todo sistema de cuatro números (x_1, x_2, x_3 y x_4) reales, racionales ó irracionales, pero que no se anulan al mismo tiempo, se dice que es un punto matemático de coordenadas homogéneas x_1, x_2, x_3 y x_4 en el sistema de coordenadas fundamental, pudiendo tomar como representantes del mismo punto todos los sistemas de valores (ρx_1, ρx_2 y ρx_3, ρx_4) en que por ρ se denota un número cualquiera, finito y diferente de cero, pero sólo éstos.

2.ª Los puntos matemáticos que satisfacen á una ecuación lineal

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

se dice que están en un plano matemático, y llamaremos coordenadas homogéneas de este plano á los números u_1, u_2, u_3, y u_4.

3.ª Los puntos matemáticos contenidos á la vez en dos planos, que, por consiguiente, satisfacen á dos ecuaciones lineales

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,\ v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0,$$

se dice que están en una línea recta matemática.

186. Antes de dar nuevas definiciones, apuntemos algunas consecuencias de las dadas.

Cuatro puntos matemáticos (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4) y (t_1, t_2, t_3, t_4) están en un plano (*), siempre que la determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 z_3 t_4$ sea nula, y sólo entonces.

Tres puntos (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) y (z_1, z_2, z_3, z_4) están en una recta, siempre que se anulen todas las determinantes formadas por tres columnas del sistema

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{matrix}$$

y sólo entonces.

(*) En todo lo que sigue se ha omitido el calificativo «matemático» al nombrar los puntos, las rectas y los planos; por el contrario, el carácter de ser «propios» los elementos, ó de estar definidos por elementos propios, se ha hecho constar expresamente.

Si se toman en un plano tres puntos (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) y (c_1, c_2, c_3, c_4) que no estén en línea recta, todos los puntos del plano están representados por el sistema de números

$$\varkappa a_1 + \lambda b_1 + \mu c_1, \quad \varkappa a_2 + \lambda b_2 + \mu c_2, \quad \varkappa a_3 + \lambda b_3 + \mu c_3,$$
$$\varkappa a_4 + \lambda b_4 + \mu c_4,$$

en cuyas expresiones $\varkappa$, λ y μ son independientes uno de otro y pueden tomar valores reales cualesquiera con la única condición de no anularse simultáneamente; los valores $\rho\varkappa$, $\rho\lambda$ y $\rho\mu$, en los que ρ es arbitrario, pero finito y diferente de cero, son los únicos que representan el mismo punto que $\varkappa$, λ y μ.

Si se toman en una recta dos puntos (a_1, a_2, a_3, a_4) y (b_1, b_2, b_3, b_4), todos los puntos de la recta están representados por el sistema de números

$$\varkappa a_1 + \lambda b_1, \quad \varkappa a_2 + \lambda b_2, \quad \varkappa a_3 + \lambda b_3, \quad \varkappa a_4 + \lambda b_4,$$

en cuyas expresiones $\varkappa$ y λ son independientes uno de otro y pueden tomar valores reales cualesquiera, sin que se anulen á la vez, y conservando la misma significación de antes para ρ, los valores $\rho\varkappa$ y $\rho\lambda$ son los únicos representantes del mismo punto que $\varkappa$ y λ.

Si se mantienen en lo sucesivo las expresiones y notaciones relativas á la incidencia de los «elementos» punto, recta y plano, en el sentido antes definido, se ve que en todas las observaciones anteriores pueden permutarse entre sí las palabras «punto» y «plano» y que los teoremas 1.°, 2.°, 4.°, 5.° y 7.° á 15.° del § **8** continúan siendo ciertos.

187. Designemos por X el elemento (x_1, x_2, x_3, x_4), etcétera. Si se dan cuatro planos de un haz y se toman en su arista dos puntos X é Y, y en los planos, pero fuera de la arista, cuatro puntos P, Q, R y S, respectivamente, el cociente

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)},$$

en el que $(xypr)$, por ejemplo, representa la determinante $\Sigma \pm x_1 y_2 p_3 r_4$, es un número que sólo depende de los planos

dados (*). En atención á esto, podemos sentar las siguientes definiciones:

4.ª En el haz cuya arista contiene los puntos X é Y, se atribuye á los cuatro planos P, Q, R y S (en este orden de sucesión) una razón doble determinada, que se define por la expresión

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)},$$

De modo análogo:

5.ª En la recta de intersección de los planos U y V se introduce para los cuatro puntos en que la cortan cuatro planos A, B, C y D (en este orden de sucesión) la expresión

$$\frac{(uvac)\,(uvbd)}{(uvbc)\,(uvad)},$$

que sólo depende de estos cuatro puntos, como razón doble de los mismos.

Si A, B, C y D son los planos XYP, XYQ, XYR y XYS,

(*) Pues, si Z es un punto cualquiera de la recta XY, puede substituir á cualquiera de los X, Y, al X, por ejemplo, porque serán

$$z_1 = \varkappa x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = \varkappa x_2 + \lambda y_2, \quad \text{etc.}$$

y

$$(zypr) = \varkappa \,.\, (xypr), \quad (zyps) = \varkappa \,.\, (xyps), \quad \text{etc.}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)} = \frac{(zypr)\,(zyqs)}{(zyqr)\,(zyps)};$$

y si P' es un punto cualquiera del plano P, serán

$$p_1 = \varkappa x_1 + \lambda y_1 + \mu p_1, \quad p_2 = \varkappa x_2 + \lambda y_2 + \mu p_2 \quad \text{etc.},$$

con lo cual

$$(xyp'r) = \mu \,.\, (xypr), \quad (xyp's) = \mu \,.\, (xyps),$$

y, por tanto, también

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)} = \frac{(xyp'r)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyp's)}.$$

(N. T.)

se puede tomar

$$a_1 = \Sigma \pm x_2 y_3 p_4, \quad a_2 = -\Sigma \pm x_1 y_3 p_4, \quad a_3 = \Sigma \pm x_1 y_2 p_4,$$
$$a_4 = -\Sigma \pm x_1 y_2 p_3, \quad b_1 = \Sigma \pm x_2 y_3 q_4 \text{ etc.},$$

y se obtiene (*)

$$(uvac) = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_r \\ v_x & v_y & v_r \\ a_x & a_y & a_r \end{vmatrix},$$

donde, por ejemplo, $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4$. Puesto que $a_x = a_y = 0$ y $a_r = -(xypr)$, será

$$(uvac) = (xypr)\,(u_x v_y - u_y v_x)$$

y, del mismo modo,

$$(uvbd) = (xyqs)\,(u_x v_y - u_y v_x),$$

etcétera. La diferencia $u_x v_y - u_y v_x$ no es nula (**), luego los planos A, B, C y D tienen la misma razón doble que la serie sección por la recta UV. De aquí se sigue que: Dos series perspectivas tienen la misma razón doble, y otro tanto ocurre en dos haces de planos perspectivos.

6.ª La razón doble constante para todas las series y todos los haces de planos que están en posición perspectiva con cuatro rayos de un haz de rectas se llama razón doble de los cuatro rayos.

(*) Para la primera igualdad basta recordar que el producto de dos matrices rectangulares con m filas y n columnas ($m < n$) es la suma de productos de las determinantes de orden m que se pueden formar tomando m columnas en una y las que ocupan iguales lugares en la otra, y observar que en el caso presente, por ser estas últimas c_1, c_2, c_3 y c_4, la suma obtenida es, precisamente, la determinante $(uvac)$.

La segunda igualdad no es sino la definición del producto por filas.—*(N. T.)*

(**) En efecto, la determinante

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

queda invariable, salvo un factor constante, al substituir los planos U y V por dos cualesquiera de su haz (**185**); ahora, si, en particular, se substituyen por los que proyectan X é Y, respectivamente, es $u_x = 0$ y $v_y = 0$, pero $v_x \neq 0$ y $u_y \neq 0$, luego la determinante no es nula.—*(N. T.)*

La razón doble de los cuatro elementos A, B, C y D de una figura de primera categoría es, por consiguiente, igual á la razón doble de toda figura proyectiva con ella, y debe llamarse también índice de D en la red ABC; si su valor es un número entero n, se dirá que D es el n^{esimo} elemento de la red ABC.

7.ª Si A, B, C y D son cuatro elementos de una figura de primera categoría, se dice que los pares AB (ó BA) y CD (ó DC) están separados ó no, según que la razón doble de $ABCD$ es negativa ó positiva.

También aquí pueden permutarse dondequiera las palabras «punto» y «plano». Los conceptos así introducidos se llamarán nuevamente gráficos ó proyectivos.

Todas las nociones y denominaciones que habíamos introducido en la Geometría proyectiva se derivan también de ellos del mismo modo. Claro es que esto es admisible solamente porque todos los teoremas gráficos conservan su validez—*y ahora sin ninguna restricción*—según demostraremos en breve.

187. La razón doble de cuatro puntos P, Q, R y S de una recta puede tomar una forma sencilla, introduciendo otros dos puntos A y B de la recta y poniendo para $i = 1, 2, 3, 4$

$$p_i = a_i + \varkappa b_i, \quad q_i = a_i + \lambda b_i, \quad r_i = a_i + \mu b_i, \quad s_i = a_i + \nu b_i,$$

con lo cual, utilizando como antes dos puntos cualesquiera X é Y de una recta que no corte á la AB, resulta para valor de aquella razón doble (*):

$$\frac{(xypr)\,(xyqs)}{(xyqr)\,(xyps)} = \frac{(\varkappa - \mu)\,(\lambda - \nu)}{(\lambda - \mu)\,(\varkappa - \nu)}.$$

De esta forma se deduce inmediatamente la relación entre las razones dobles resultantes de la permutación de los puntos P, Q, R y S, como se ha dicho en el núm. **163**, la cual se extiende ahora á cualquiera figura de primera categoría. Se demuestra, además, para cinco elementos P, Q, R, S y T de una figura de primera categoría, que el producto de las razones

(*) Basta observar, por simple descomposición en suma de determinantes, que

$$(xypr) = (\varkappa - \mu)\,(xyba), \quad (xyqr) = (\lambda - \mu)\,(xyba), \text{ etc.},$$

y, además, que $(xyba)$ no es nulo.—(*N. T.*)

dobles de las tres figuras $PQST$, $PQTR$ y $PQRS$ es igual á la unidad, de donde se sigue la exactitud de los cuatro últimos teoremas del § **7**. De los teoremas gráficos del § **9** sólo hace falta demostrar aquí uno, el tercero, por ejemplo; conservando las notaciones de allí, las razones dobles de las figuras bca_1a_2, cab_1b_2 y abc_1c_2 dan como producto la unidad (**173**); si, pues, la primera razón es negativa y la segunda positiva, la tercera será negativa. Los teoremas gráficos de los §§ **10**, **11** y **12** se deducen de los que les preceden.

Las figuras que tienen igual razón doble son proyectivas. La razón doble de cuatro elementos armónicos es negativa é igual á su valor recíproco; por consiguiente, igual á -1. Toda figura de cuatro elementos cuya razón doble sea igual á -1 es armónica.

Conservando las notaciones anteriores, se halla (*):

$$\overset{ABS}{\text{ind.}}\, P = \frac{(xyas)\,(xybp)}{(xybs)\,(xyap)} = \frac{\nu}{\varkappa},\quad \overset{ABS}{\text{ind.}}\, Q = \frac{\nu}{\lambda},\quad \overset{ABS}{\text{ind.}}\, R = \frac{\nu}{\mu},$$

$$\overset{PQR}{\text{ind.}}\, A = \frac{(xypr)\,(xyqa)}{(xyqr)\,(xypa)} = \frac{(\mu-\varkappa)\lambda}{(\mu-\lambda)\varkappa} = \frac{\frac{\nu}{\varkappa}-\frac{\nu}{\mu}}{\frac{\nu}{\lambda}-\frac{\nu}{\mu}};$$

por consiguiente, si en la red ABS el índice de R está comprendido entre los de P y Q, la razón doble de la figura $PQRA$ es negativa, y los pares PQ y RA están separados.

Los puntos P, Q, R y A forman una serie armónica si cumplen la condición

$$\frac{2}{\mu} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda}.$$

Esta queda satisfecha, de un modo general, cuando P, Q y R tienen en la red ABS los índices $n-1$, $n+1$ y n, respectivamente, siendo n un número entero cualquiera, es decir, que también en la definición actual de los índices enteros, el $(n-1)^{esimo}$ punto de la red está armónicamente separado

(*) Pues, análogamente á lo dicho en la nota anterior,

$$(xyas) = \nu\,(xyab),\ (xybp) = -(xyab),\ (xybs) = -(xyab),$$
$$(syap) = \varkappa\,(xyab), \text{ etc.}$$

(N. T.)

del $(n+1)^{esimo}$ por el n^{esimo} y el punto cero, y la definición coincide, por tanto, con la anteriormente dada. Ahora bien, si los puntos A y B_1 están separados por los B_0 y P, con lo cual la razón doble de AB_1B_0P es negativa y, por consiguiente, la de AB_0B_1P mayor que 1 y, además, si n es el mayor número entero y positivo contenido en el índice de P en la red AB_0B_1 y B_n y B_{n+1} son los n^{esimo} y $(n+1)^{esimo}$ puntos de la red AB_0B_1, los puntos B_n y B_{n+1} están separados por los A y P. Con esto queda demostrado el teorema gráfico del § **15** (**91**) que, desde el punto de vista de entonces, no podía ser deducido de proposiciones gráficas, y se infieren, sin más, todos los demás teoremas gráficos que hemos deducido en los §§ **15** á **18**. Los pares PQ y RS son equivalentes respecto de A si se cumple la condición

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\varkappa}+\frac{1}{\nu}, \quad \text{ó bien} \quad \frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}.$$

Para poder extender todos los teoremas del § **21** al caso de indices irracionales, observamos que

$$\overset{APQ}{\text{ind. } R}=\overset{RQP}{\text{ind. } A}=\frac{(\varkappa-\mu)\lambda}{(\varkappa-\lambda)\mu}=\frac{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}},$$

y definimos para cualquier posición de los cinco puntos:

$$\overset{A}{\text{ind.}}\binom{RS}{PQ}=\frac{\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\varkappa}-\frac{1}{\lambda}},$$

de manera que

$$\overset{A}{\text{ind.}}\binom{PR}{PQ}=\overset{APQ}{\text{ind. } R},$$

y, por consiguiente, si los pares PQ y RT son equivalentes respecto de A,

$$\overset{A}{\text{ind.}}\binom{RS}{PQ}=\overset{A}{\text{ind.}}\binom{RS}{RT}=\overset{ART}{\text{ind. } S};$$

pudiendo establecerse fácilmente la identidad de esta defini-

ción con la dada en el § **21** para la serie de puntos allí considerada. Los teoremas del § **21** aparecen ahora también como ciertos para el caso de no ser todos los índices racionales, primero en la serie de puntos, y después, como consecuencia, en los haces de rectas y en los de planos. Por último, con esto desaparecen también las restricciones del § **22**, según las cuales los cocientes de las coordenadas debían ser números racionales y sólo eran representables por coordenadas los elementos resultantes de construcciones hechas con los que determinan el sistema de coordenadas. El concepto de coordenadas queda así generalizado, de manera que con cinco puntos que de cuatro en cuatro no están en un plano puede formarse un sistema de coordenadas, calculándose en todos los sistemas de la misma manera la razón doble por medio de éstas, y teniendo igual forma siempre la condición de incidencia de punto y plano.

188. Los conceptos primitivos de la Geometría proyectiva han alcanzado con lo antes expuesto la vasta significación á que se hizo referencia al final del § **15**. Para poder establecer el teorema allí enunciado, son necesarias únicamente estas dos definiciones:

8.ª Si A, B y C son puntos propios de una recta y el C está entre los A y B, todo punto de la recta que no esté separado del C por los A y B se dice que es un «punto del segmento AB» ó un «punto situado entre A y B».

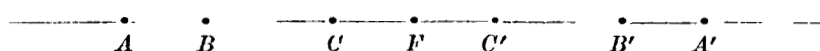
9.ª Si D y E son puntos del segmento AB, todo punto F de la recta AB separado del A ó del B por los D y E, se dice que es un «punto situado entre D y E».

Los teoremas 6.° á 18.° y la definición 4.ª del § **1** son aplicables á los puntos del segmento AB; para la demostración se pueden introducir los índices en la red ABC, los cuales adquieren todos los valores positivos para los puntos del segmento AB, y el de F está comprendido entre los de D y E (**169**). Tomemos ahora dentro de un segmento rectilíneo AB el punto impropio E, y supongamos que, sobre la recta AB, pueden definirse puntos A_1, A_2, A_3, ... en número ilimitado. Sean a_1, a_2, a_3, ... los índices de los puntos A_1, A_2, A_3, ... en la red ABE; estos números positivos tienen un límite inferiór c, de tal manera que ninguno de ellos puede ser menor que c, pero que si d es un número cualquiera mayor que c, no todos los

números a_1, a_2, a_3, ... son mayores que d (*). Si hacemos corresponder á los índices c y d los puntos C y D, el C se confundirá con el B ó estará entre los A y B; ningún punto de la serie $A_1 A_2 A_3$ ..... está entre B y C, y entre A y D no están todos los puntos de la serie. Con esto queda demostrado el teorema formulado en el núm. **107** y, al mismo tiempo este otro más general:

Si A, B *y* F *son tres elementos dados de una figura de primera categoría, y en ésta pueden definirse elementos* A_1, A_2, A_3 ..... *en número ilimitado, que estén separados del* F *por los* A *y* B, *existe un elemento* C *separado del* F *por los* A *y* B, *ó confundido con el* B, *tal que cualquiera que sea un elemento* D *separado del* F *por los* A *y* C, *no todos los elementos de la serie* $A_1 A_2 A_3$ ..... *están separados del* F *por los* A *y* D, *mientras que ninguno de ellos está separado del* F *por los* B *y* C.

189. Este teorema puede aplicarse, por ejemplo, en la investigación de los elementos de coincidencia de una involución en una figura de primera categoría. La involución está determinada por dos pares de elementos; si estos pares están separados, no existe ningún elemento de coincidencia (**114**). Según esto, sean AA' y BB' dos pares de puntos dados sobre una recta r, no separados uno por otro, pero pudiendo estarlo los AB' y $A'B$. Si, sobre la recta r, se toma el punto C entre



los B y B' respecto del punto límite A, y se llama C' á su homólogo en la involución determinada por los pares AA' y BB', también está C' entre B y B' respecto de A (**113** y **114**); luego C' estará entre B y C ó entre C y B'. Fijémonos sólo en las posiciones de C en que sucede lo último, y llamemos F al punto de la recta r, comprendido entre los B y B', determinado por el conjunto de puntos C según el teorema que precede; el punto F estará entre C y C' (pues entre B y C' no

(*) Quizás convenga advertir que la palabra *límite* no tiene aquí el significado corriente, esto es, número al cual se aproximan indefinidamente otros, sin que la diferencia sea *nunca nula*, sino que es el número llamado ordinariamente *extremo inferior* del grupo formado por los números en cuestión. (Véase, por ejemplo, Capelli, *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 1909, pág. 477.)

existe ninguno de los C); á cada punto situado entre B y F corresponde en la involución un punto entre B' y F, y recíprocamente; luego F es homólogo de sí mismo, y otro tanto ocurre (**114**) al cuarto punto armónico G respecto de los A, A' y F. Por consiguiente, *dados en una figura de primera categoría dos pares de elementos no separados, la involución que determinan tiene dos elementos de coincidencia.* La cuestión relativa á los elementos de coincidencia de dos figuras de primera categoría superpuestas, que son proyectivas, pero no equivalentes ni involutivas, puede reducirse al caso de la involución, pues estos elementos de coincidencia deben serlo al mismo tiempo de la involución determinada por la proyectividad dada, con arreglo al teorema del número **115**, y recíprocamente (*).

Al mismo resultado relativo á la involución conduce la igualdad de las razones dobles $(ABB'X)$ y $(A'B'BX')$ correspondientes á dos elementos conjugados X y X'. Designando, para abreviar, por $-m$ la magnitud negativa $(AB'BA')$, será

$$(ABB'X) = 1 - (AB'BX),$$

$$(A'B'BX') = \frac{(A'B'BA)}{(A'B'X'A)} = \frac{1+m}{1-(AB'X'A')}$$

$$= \frac{1+m}{1+\frac{m}{(AB'BX')}},$$

$$[1-(AB'BX)]\,[m+(AB'BX')] = (1+m)\,(AB'BX').$$

Si X es un punto de coincidencia, $(AB'BX)$ y $(AB'BX)$ serán un mismo número φ, y tendremos:

$$\varphi^2 + 2m\varphi = m; \quad \varphi = -m \pm \sqrt{m(m+1)}.$$

Estos dos valores de φ son las coordenadas de los puntos de coincidencia F y G en la red $AB'B$. Puesto que

$$m(m+1) < (1+m)^2,$$

(*) Véase *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1882, año XXVII, pág. 124.—*(N. A.)*

al signo $+$ corresponde un valor $(AB'BF)$ comprendido entre 0 y 1, y al signo $-$ un valor $(AB'BG) < -m$.

Ambos valores son, en general, irracionales; veamos cuál es su significación geométrica. Para ello, podemos concretarnos al caso en que los puntos dados A, A' B y B' son puntos propios de una recta; entonces, m es un número positivo y racional, que, considerado como índice en la red $AB'B$, determina la posición del punto A', ó de un punto que no difiere sensiblemente de él y que, para sucesivas consideraciones, se toma en lugar del A'. El índice de F en aquella red

$$(AB'BF) = x, \quad 0 < x < 1,$$

es, en general, irracional, pero, aunque sea racional, puede suceder que exija más construcciones de las que puedan realizarse en la figura. Determinemos ahora el número entero y positivo λ suficientemente grande para que el punto E_1, correspondiente al índice λ, limite con el B' un segmento que no sea mayor que el MN definido en el número **182**. Si E_2, E_3, ... son los puntos que corresponden á los índices 2, 3, ... en la red $AB'E_1$, tenemos

$$(AB'BE_1) = \frac{1}{\lambda}, \quad (AB'BE_2) = \frac{2}{\lambda}, \quad (AB'BE_3) = \frac{3}{\lambda}, \ \ldots\ldots;$$

las figuras $AE_1B'E_2$, $AE_2E_1E_3$, $AE_3E_2E_4$, ... son armónicas y, según lo dicho en el núm. **95**, los segmentos E_1E_2, E_2E_3, ... son menores que el $B'E_1$ y, por consiguiente, que MN. Sean a_w y $a_w + \frac{1}{w}$ los números que comprenden al x en la serie

$$0, \frac{1}{w}, \frac{2}{w}, \ldots\ldots \frac{w-1}{w}, 1,$$

A_w y B_w los puntos correspondientes y v el primer número de la serie 2, 3, ... λ para el que el segmento A_vB_v no sea mayor que el MN.

Entonces, si no se halla x entre los números

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \ldots\ldots; \frac{1}{v}, \frac{2}{v}, \ldots\ldots, \frac{v-1}{v},$$

designemos por F' un punto propio comprendido entre los A_v y B_v; de los puntos conjugados con los A_v y B_v en la involución, uno está fuera del segmento $A_v B_v$ y el otro—por ejemplo, el conjugado con A_v—entre A_v y B_v; luego no es sensiblemente distinto del F'. Como, según esto, puede considerarse aproximadamente como un par de la involución el $A_v F'$, F' no es sensiblemente distinto de su conjugado, y tiene, aproximadamente, las propiedades del punto F. Por esto, en la aplicación de la Geometría analítica, el punto propio que hemos llamado F' se designa por F y como correspondiente al índice x; por consiguiente, se le considera como punto de coincidencia de la involución.

Según lo dicho en el núm. **182**, este resultado puede extenderse á cualquiera involución en una figura de primera categoría.

190. Para resolver de un modo general la cuestión, supongamos que se haya determinado por vía analítica un punto F, que, en una figura dada por elementos propios de la red $ABCDE$ (**184**), desempeñe un cierto papel en una relación proyectiva establecida de antemano. En tal caso tendremos para coordenadas de aquel punto un sistema de valores f_1, f_2, f_3 y f_4, cuyos cocientes serán reales, pero no racionales ó no apropiados para la construcción exacta. El ejemplo expuesto basta para hacer ver que siempre existe un punto propio ó representable por rectas propias que, exacta ó aproximadamente, tiene con la figura dada las mismas relaciones que el F. Este punto se designa en la aplicación de la Geometría analítica como tal punto F y representante geométrico del sistema de valores (f_1, f_2, f_3, f_4).

La figura dada puede ampliarse con el punto ahora designado por F y, así ampliada, someterse de nuevo á los procedimientos analíticos. Pero si se quieren hallar coordenadas en la red $ABCDE$, conforme á las primitivas definiciones, no siempre resultan racionales sus cocientes, ni es preciso que coincidan con las razones de los números f_1, f_2, f_3 y f_4, los cuales, no obstante, se han tomado como coordenadas de F. La contradicción que aquí resulta desaparece considerando que la inexactitud que á las coordenadas atañe recae sobre el cálculo correspondiente. Todas las determinaciones de coordenadas se redujeron al problema de representar la posición

de un punto propio P de la recta de unión de dos puntos B y E, situado entre éstos, por un índice en la red ABE, suponiendo para ello tomado el punto A fuera del segmento BE. Si $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$ eran los índices de dos puntos propios H' y K', entre los cuales está P tales que dentro del segmento $H'K'$ no podía distinguirse más de un punto, y se podía construir un punto propio correspondiente á un número racional ξ, comprendido entre $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$, este punto no era sensiblemente distinto del P, por cuyo motivo tomábamos ξ como coordenada de P en la red ABE. Ahora necesitamos ampliar esta determinación de tal manera, que todo número ξ', racional ó irracional, comprendido entre $\frac{r}{v}$ y $\frac{s}{v}$, pueda ser adoptado con igual razón para coordenada de P, pues si del modo explicado se trata de representar ξ' dentro del segmento BE, se llega á un punto que no es sensiblemente distinto del P. Así asociamos al punto P una serie continua de números, cada uno de los cuales define con suficiente exactitud la posición de P, y como cada una de las coordenadas puede ser tomada arbitrariamente de entre los números de una cierta serie, las razones de las coordenadas quedan, en general, afectas de la indeterminación consiguiente á la falta de precisión de los conceptos geométricos, que ya al final de la Introducción hicimos resaltar. El cálculo deduce de relaciones dadas entre números otras que coexisten con ellas sin restricciones, y obtiene de números dados otros que satisfacen exactamente relaciones con los dados, de antemano establecidas; pero el paso de la figura á los números y el recíproco de los resultados del cálculo á la figura no pueden efectuarse con igual exactitud.

191. En lo que precede hemos tenido en cuenta únicamente construcciones gráficas; pero las relacionadas con el concepto de congruencia son tan inexactas como aquéllas. Designando, como en el núm. **150**, por A, B, D, E, A y A' puntos propios de un plano, tales que los A, A_1 y A' estén en una recta, el A entre los A_1 y A', los B y D á un lado de A_1A', los A_1 y E á diferentes lados de AB, las rectas A_1B y AD sean perpendiculares á la A_1A' y las figuras ABA_1

y BAE sean congruentes *(fig. 71)*, la semirecta AE se confunde con la AD en la Geometría euclidiana, cae entre los AD y AA_1 en la de Gauss y entre los AD y AA' en la de Riemann, según lo cual la razón doble $A\ (BDA_1E)$ es nula, negativa ó positiva, respectivamente. La experiencia muestra que las semirectas AD y AE se confunden ó no están sensiblemente separadas. Podemos, pues, tomar arbitrariamente el valor de aquella razón doble, índice de la recta AE en la red $A\ (BDA_1)$, entre los contenidos en una serie continua de números positivos y negativos muy próximos á cero; pero no estamos obligados á tomar precisamente el valor cero como exige la Geometría euclidiana, que, indudablemente, para las figuras consideradas por nosotros (**12**) posee suficiente exactitud.

Adición al § 23.

Véase: *Mathematische Annalen*, 1887, tomo XXX, pág. 130.

En la presente obra no han sido tratadas las figuras curvas; solamente en un lugar (**10**) se ha hecho referencia á figuras de esta especie. En cambio, en la *Einleitung in die Differential-und Integralrechnung*, 1892, en la que se han discutido las conexiones del Cálculo infinitesimal con la Geometría, ha sido preciso para ello incluir, además de consideraciones generales sobre la limitada exactitud de las observaciones (páginas 12 á 14, 39, 44, 68 y siguientes), el examen de las relaciones existentes entre las curvas planas y las funciones continuas (§§ **7** y **10**), entre la tangente y la derivada (§ **16**) y entre el área ó la longitud de un arco y la integral (§ **20**).

En mi opinión, también en estas materias debe realizarse una interpretación empírica para evitar contradicciones en la aplicación del análisis á la Geometría. Pero, aparte la percepción de los sentidos, no es lícito referirse á la «intuición» ó á la «imaginación» como fuentes especiales de conocimientos matemáticos. Por ejemplo, cuando se supone en las aplicaciones de la Matemática que todas las curvas «intuitivas» tienen curvas diferenciales é integrales, también intuitivas (Köpcke: *Mathem, Ann.*, 1887, tomo XXX, pág. 140),

hay que buscar la justificación de tal aserto en las propiedades de las líneas físicas, y en efecto, allí se encuentra. Toda curva plana, convenientemente limitada y referida á un adecuado sistema de coordenadas, puede representarse con exactitud suficiente por una función de una variable, derivable indefinidamente, y á esta representación se refiere en las aplicaciones el mecanismo analítico. En interés de la claridad, no deben pasarse en silencio las hipótesis de este género.

Índice alfabético

NOTA. Los números indican los párrafos correspondientes.

